III. INTRODUCCION A LA OPTIMIZACIÓN Y A LA TEORÍA DE LOS JUEGOS[1]

1. Repaso

Algunos resultados centrales:

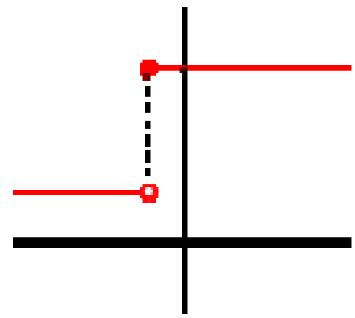
Continuidad de funciones de variable real Una función y=f(x) es *continua en un punto interior* c de su dominio de definición si

$$\text{lím}_{x \to c} f(x) = f(c).$$

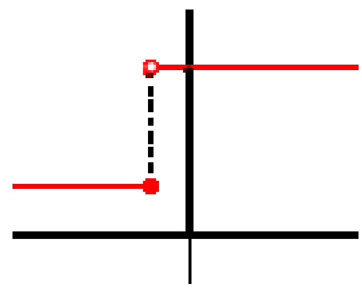
La función y=f(x) es *continua en el extremo inferior* a de su dominio si

$$\text{lím}_{x \to a+} f(x) = f(a).$$

La expresión $x \to a^+$ debe leerse como "x tendiendo hacia a desde la derecha". Una definición equivalente puede ser dada para la continuidad de la función en el extremo superior b de su dominio, intercambiando $x \to b^+$ por $x \to b^-$ y f(a) por f(b).



Una función continua a la derecha



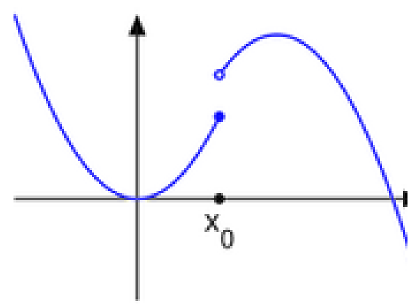
Una función continua a la izquierda

Teorema Max-min para funciones continuas de una variable real

Si f es continua en todo punto del intervalo cerrado [a,b] de la recta real, luego alcanza tanto un valor máximo absoluto M y un valor mínimo absoluto m en algún punto de [a,b]. O sea, existen puntos x_1 y x_2 en [a,b] con $f(x_1)=M$, $f(x_2)=m$, y $m \leq f(x) \leq M$ para cualquier otro x de [a,b].

Semi-continuidad

Sea S un conjunto no vacío de R^n. Una función $f:S \to R^n$ se dice *semicontinua superiormente* en x^0 de S, si para todo $\epsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal que $x \varepsilon S$ y $\|x-x^0\|<\delta$ implican que $f(x)-f(x^0)<\varepsilon$. Una función $f:S \to R^n$ se dice semicontinua inferiormente en x^0 de S, si para todo $\epsilon>0$ existe un $\delta>0$ tal que $x \varepsilon S$ y $\|x-x^0\|<\delta$ implican que $f(x)-f(x^0)<-\varepsilon$. Una función continua es semicontinua superior e inferiormente.



Función semi-continua inferiormente – El punto lleno azul corresponde a $f(x_0)$

Esta noción está vinculada con la necesidad en economía de introducir conceptos de *saltos* en las funciones de

[1] Véase *Arna Hallam, Microeconomics, Iowa State University, "A Little Real Analysis and Topology", 2005.* El alumno también puede consultar K. Lancaster , Economía Matemática, Barcelona, 1972, y Tom M. Apostol, Calculus, 1967, Capítulo I; Michael D. Intriligator, *Mathematical Optimization and Economic Theory, Prentice-Hall, 1971.* Hay versión en español: *Optimización Matemática y Teoría Económica*, *Prentice-Hall Internacional, 1973;* Roger B. Myerson, *Nash equilibrium and the history of economic theory, Journal of Economic Literature 36 (1999);* Charles A. Holt and Alvin E. Roth, *The Nash equilibrium: A perspective, Proc. Natl Acad. Sci. USA, 101 (March 2004).*

comportamiento de los agentes económicos. Ambos conceptos indican en primer término que el salto, si existe, está acotado. Segundo, en la semicontinuidad inferior el punto de la rama inferior de la función donde se produce el salto pertenece al dominio de la función, no así el punto correspondiente a la rama superior. En el semicontinuidad superior, el punto de la rama superior de la función en x^0 pertenece al dominio de la función, no así el punto correspondiente de la rama inferior.

Pasamos ahora a considerar algunos resultados importantes de carácter topológico. Para ello necesitamos el concepto de recubrimiento de un conjunto: una colección *F* de conjuntos es un recubrimiento de S si S está contenido en forma impropia en la unión de los conjuntos de *F*. Si ésta es una colección de conjuntos abiertos, *F* es denominada un recubrimiento abierto de S. Por ejemplo, la recta real está recubierta por la colección de todos los intervalos abiertos (a,b). Obsérvese que este recubrimiento no es numerable[2]. También, la recta real está recubierta por la colección de todos los intervalos abiertos de la forma (n,n+2) con n entero. A diferencia del anterior, este recubrimiento sí es numerable.

2. Teoremas fundamentales sobre máximos y mínimos

Teorema de recubrimiento de Lindelöf Sean A un subconjunto impropio de R^n y *F* un recubrimiento abierto de A. Luego existe una subcolección numerable de *F* que también recubre a A.

Teorema de Heine-Borel Sea *F* un recubrimiento abierto de un conjunto cerrado y acotado A contenido en R^n. Luego existe una subcolección finita de *F* que también recubre a A.

Recordemos que un conjunto S de R^n se dice *compacto* si y solamente si todo recubrimiento abierto de S contiene un subrecubrimiento finito, esto es, una subcolección finita que también recubre a S. De aquí que este último teorema implique que todo conjunto cerrado y acotado de R^n es compacto. En resumen, si S es un subconjunto de R^n podemos decir que los tres enunciados siguientes son equivalentes:

(a) S es compacto.
(b) S es cerrado y acotado.
(c) Cada subconjunto finito de S tiene un punto de acumulación en S, es decir, de cada sucesión de elementos de S X_1, X_2,... podemos extraer una subsucesión que tiende hacia un elemento límite de S.

Teorema de Bolzano-Weierstrass Este resultado afirma que cualquier conjunto infinito acotado de R^n posee un punto de acumulación. En R^1 este teorema enuncia que toda sucesión acotada de números reales contiene una subsucesión convergente. La sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es denominada acotada si existe un número L tal que el valor absoluto $|a_n|$ es menor que L para todo subíndice n.

[2] Un conjunto es numerable cuando sus elementos pueden ponerse en correspondencia *uno a uno* con el conjunto de los números naturales. Por ejemplo, el conjunto de todos los números pares es numerable porque la correspondencia siguiente: n → n+1 si n es impar ; n → -n si n es par es una *biyección*: cada número natural corresponde a un único número par y viceversa. Algunos autores toman una definición alternativa de conjunto numerable que incluye también a los conjuntos finitos. Esta definición establece que un conjunto es numerable cuando existe correspondencia uno a uno entre el conjunto y algún subconjunto de los números naturales y es por esto que en ocasiones se especifica conjunto infinito numerable o a lo sumo numerable para evitar ambigüedades, refiriendo la primera expresión únicamente a conjuntos infinitos y la segunda permitiendo conjuntos finitos. Georg Cantor fue el primero que hizo uso de este concepto en un artículo publicado en 1874 que marcaría el nacimiento de la teoría de conjuntos.

En forma más general, toda sucesión a_n en un conjunto compacto, contiene una subsucesión convergente.

Teorema del extremo de Weierstrass Este teorema demuestra que una función real continua, definida sobre un conjunto compacto no vacío, alcanza su máximo y su mínimo sobre ese conjunto. Así, supongamos que $f:S \rightarrow R$ es una función real sobre el conjunto compacto S no vacío. Denotemos como M al supremo de f(x) en S y como m al ínfimo de la misma función en S. Luego, existe un punto x^m y otro punto x^M tales que $f(x^m)=m$ y $f(x^M)=M$. Por consiguiente, la función continua f(x) alcanza un máximo y un mínimo sobre un conjunto compacto (ver gráfico siguiente).

3. <u>Programación clásica</u>

El problema de la programación clásica consiste en hallar los valores de ciertas variables, llamadas *instrumentos*, que maximicen o minimicen una función, denominada *función objetivo*, sujeta a un conjunto de restricciones de igualdad o *restricciones* simplemente[3] . Lo planteamos de la siguiente manera:

$$\text{Max}_{x}\ F(\mathbf{x}) \text{ sujeta a } \mathbf{g}(\mathbf{x})=\mathbf{b}.$$

Ésta es una expresión en términos vectoriales que desarrollamos de la forma que sigue:

[1] $\text{Max}_{x_1, x_2, \ldots, x_n}\ F(x_1,x_2, \ldots x_n)$ sujeta a

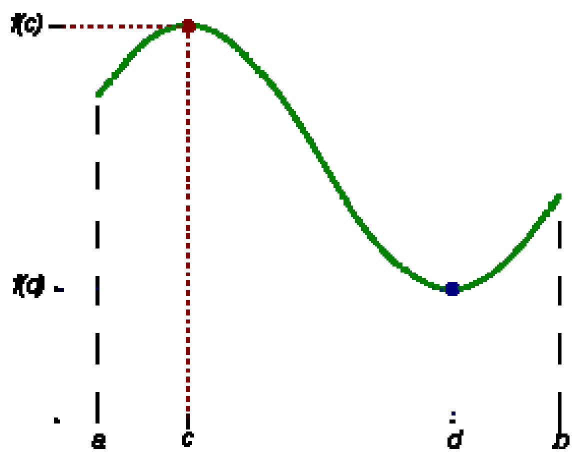
[2] $g_1(x_1,x_2, \ldots, x_n)=b_1$

$g_2(x_1,x_2, \ldots, x_n)=b_2$

. . .

$g_m(x_1,x_2, \ldots, x_n)=b_m$

La función objetivo viene dada por [1] en tanto que las restricciones vienen indicadas por [2].



Una función continua en el intervalo cerrado [a,b] con un máximo absoluto (rojo) y un mínimo absoluto (azul)

Cabe consignar que ambos tipos de entidades desempeñan un rol relevante en la economía: ejemplos típicos de [1] son los beneficios de las empresas, las utilidades percibidas por los consumidores, o los costos de producción de un proyecto en donde el objetivo, más que maximizar, es minimizar el costo, lo que equivale a maximizar el negativo de la función de costos del proyecto. Un ejemplo típico de restricciones son las disponibilidades de recursos escasos del consumidor, de una empresa o de una economía en su conjunto. Las constantes $b_1, b_2, \ldots, b_m$ son las constantes de restricción resumidas en el vector **b**.

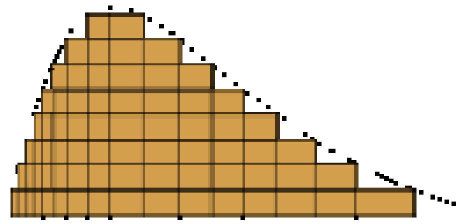
Se supone que n y m son finitos y que $n>m$. La diferencia n-m es el número de *grados de libertad* del problema. Las funciones F y $g_1, \ldots, g_m$ se suponen dadas, continuamente diferenciables y carentes de elementos aleatorios; los números $b_1,\ldots, b_m$ son números reales. En sentido geométrico, cada una de las restricciones [2] define un conjunto de puntos en el espacio R^n y la intersección de todos los m conjuntos es el *conjunto de oportunidades:*

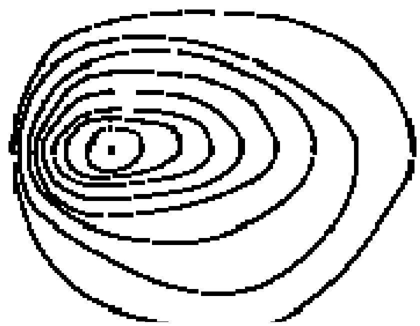
[3] Véase Michael D. Intriligator, *ob. cit, ch. 1.*

[3] $\boldsymbol{X}$= **{x**ε$\boldsymbol{R^n}$**| g(x)=b}**.

Una *curva (o hipersuperficie en el caso n>2) de nivel* de la función objetivo es el conjunto de puntos de $\boldsymbol{R^n}$ tales que el valor de la función objetivo es constante:

[4] **{x**ε$\boldsymbol{R^n}$ **|** ***F(x)***= *constante***}**





Curvas de nivel

de modo que diferentes constantes dan lugar a distintas curvas de nivel. Geométricamente, el problema consiste en hallar el (o los) punto(s) en el conjunto de oportunidades en el (los) cual(es) se alcance la curva (o hipersuperficie) de nivel más elevada. La *dirección de preferencia* es la dirección en la cual el valor de la función objetivo, la constante de [4], se incrementa más rápidamente. Esta dirección viene dada por la dirección del vector gradiente de las derivadas parciales de primer orden de la función objetivo:

$$\partial F(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x} = [\partial F(\mathbf{x})/\partial x_1,\ldots., \partial F(\mathbf{x})/\partial x_n]$$

que representa un vector fila en el espacio euclídeo R^n apuntando en la dirección del incremento más acentuado de $F(\mathbf{x})$[4]. Por lo tanto, el problema consiste en hallar el o los puntos del conjunto de oportunidades en el (los) que se alcance la hipersuperficie de nivel de la función objetivo más elevada. Como la función objetivo es continua y el conjunto de oportunidades es cerrado, según el teorema del extremo de Weierstrass el problema tendrá solución si el conjunto de oportunidades es no vacío y compacto.

4. Método de los multiplicadores de Lagrange

En los problemas de optimización, los Multiplicadores de Lagrange, nombrados así en honor a Joseph Louis Lagrange, son un método para trabajar con funciones de varias variables que nos interesa maximizar o minimizar, y están sujetas a ciertas restricciones. Este método reduce el problema restringido en *n* variables y una restricción a uno sin restricciones de *n + 1* variables cuyas ecuaciones pueden ser resueltas. Se introduce una nueva variable escalar desconocida, el *multiplicador de Lagrange*, para cada restricción y se forma una combinación lineal involucrando a los multiplicadores como coeficientes. El fin es, usando alguna función implícita, encontrar las condiciones para que la derivada con respecto a las variables independientes de una función sea igual a cero.

Consideremos un caso bidimensional. Supongamos que tenemos la función, $F(x_1,x_2)$, y queremos maximizarla, sujeta a:

$$g(x_1,x_2) = c,$$

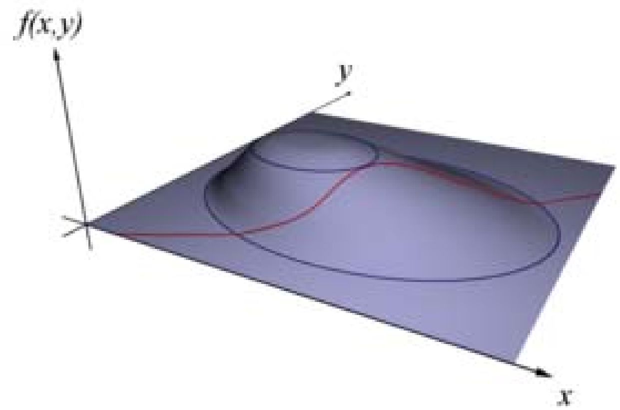
[4] La derivada de la función escalar *F* con respecto a un vector columna ***x*** resulta en un vector fila $\partial F(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x}$. Ver Intriligator, Apéndice B, Sec. B.9.

donde c es una constante. Podemos visualizar las líneas de curvas de nivel de F dadas por

$$F(x_1,x_2) = d_n$$

para varios valores de d_n, y el *contorno* de g dado por $g(x_1,x_2) = c$. Supongamos que hablamos de la curva de nivel donde g = c. Entonces, en general, las curvas de nivel de F y g serán distintas, donde el contorno dado por g = c por lo general intersectará y cruzará muchos contornos de F. En general, moviéndose a través de la línea g=c podemos incrementar o disminuir el valor de F. Sólo cuando g=c, y el contorno que estamos siguiendo toca tangencialmente (pero no lo corta) a una curva de nivel de F, no incrementaremos ni disminuiremos el valor de F. Esto ocurre en el extremo local restringido y los puntos de inflexión restringidos de F.

Un ejemplo familiar puede ser obtenido de los mapas climatológicos, con sus curvas de nivel de presión y temperatura (isóbaras e isotermas respectivamente): el extremo restringido ocurrirá donde los mapas superpuestos muestren curvas que se tocan.

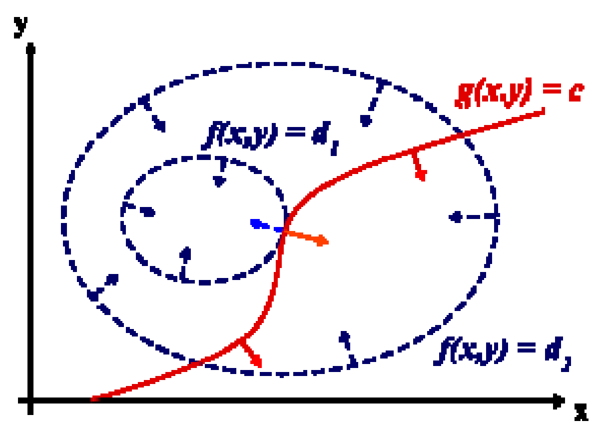


Hallar x e y que maximizan *f(x,y)* sujeta a la restricción (en rojo) *g(x,y)=c*

Geométricamente traducimos la condición de tangencia diciendo que los gradientes de F y g son vectores paralelos en el máximo. Introduciendo un nuevo escalar, λ, resolvemos

$$\nabla[F(x_1,x_2) - \lambda\,(g(x_1,x_2) - c)] = 0$$

El carácter ∇ se lee "gradiente" y corresponde al vector de derivadas parciales de la función entre corchetes. El escalar $\lambda \neq 0$ es el "parámetro de Lagrange". Una vez determinado el valor de λ, volvemos al número original de variables y así continuamos encontrando el extremo de la nueva ecuación no restringida $L(x_1,x_2) = F(x_1,x_2) - \lambda(g(x_1,x_2) - c))$ de forma tradicional. Eso es, $L(x_1,x_2) = F(x_1,x_2)$ para todo (x_1,x_2) satisfaciendo la condición porque $g(x_1,x_2) - c$ es igual a cero en la restricción, pero los ceros de $F(x_1,x_2)$ están todos en $g(x_1,x_2) = c$.



Mapa de contorno de la figura anterior. La línea roja muestra la restricción *g(x,y)=c*. Las líneas azules son los contornos de *f(x,y)*. La solución se obtiene en el punto de tangencia de las líneas azul y roja.

El método Sea $F(\mathbf{x})$ una función definida en un conjunto abierto n-dimensional $\{\mathbf{x} \varepsilon R^n\}$. Se definen m restricciones $g_i(\mathbf{x}) = 0$, $i=1,\ldots,m$, y se define (si las restricciones son satisfechas):

$$h(\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}) = F - \Sigma_{i=1}^{m} \lambda_i g_i$$

Se procede a buscar un extremo para h: $\partial h/\partial x_j=0$, lo que es equivalente a:

$$\partial F/\partial x_j = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \; \partial g_k/\partial x_i$$

Los multiplicadores desconocidos λ_k se determinan a partir de las ecuaciones con las restricciones y conjuntamente se obtiene un extremo para *h* que al mismo tiempo satisface las restricciones (i.e. $g_k=0$), lo que implica que *F* ha sido optimizada.

El problema general [1]-[2] puede tratarse de modo parecido. Supongamos que una solución local tiene lugar en **x*** y que las funciones de restricción satisfacen la *hipótesis jacobiana* de que la matriz jacobiana de las derivadas parciales de primer orden sea de rango de fila completo en esta solución. En el problema anterior de un grado de libertad la matriz jacobiana es un vector fila de pleno rango de fila (=1) siempre que al menos una de las derivadas parciales de las funciones de restricción no se anule. Las variables pueden volver a numerarse, si es preciso, de modo que las últimas *m* columnas de la matriz jacobiana tengan un determinado valor no nulo y el vector instrumento se pueda particionar como $\mathbf{x}=(\mathbf{x}^1,\mathbf{x}^2)$, en el que $\mathbf{x}^1$ consta de *n-m* variables y $\mathbf{x}^2$ de *m* variables. Por la hipótesis jacobiana, podemos despejar las restricciones mediante el teorema de la función implícita en el entorno de la solución, dando $\mathbf{x}^2$ como una función de $\mathbf{x}^1$:

$$\mathbf{x}^2=\mathbf{h}(\mathbf{x}^1),$$

donde **h** es un vector columna de *m* funciones. Replanteando ahora el problema:

$$\text{Máx}_{x1}\ H(\mathbf{x}^1) = F(\mathbf{x}^1,\mathbf{h}(\mathbf{x}^1))$$

resulta un problema no condicionado, que, tiene un máximo local como condición necesaria, si:

[5] $$\partial H/\partial \mathbf{x}^1= \partial F/\partial \mathbf{x}^1 + \partial F/\partial \mathbf{x}^2\ \partial \mathbf{h}/\partial \mathbf{x}^1= \mathbf{0},$$

condición en la cual $\partial H/\partial \mathbf{x}^1$ es un vector (1x(*n-m*)) y $\partial \mathbf{h}/\partial \mathbf{x}^1$ es una matriz *(mx(n-m)).* Como las restricciones pueden expresarse en términos de la identidad:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^1,\mathbf{h}(\mathbf{x}^1))\equiv\mathbf{b},$$

derivando resulta:

$$\partial \mathbf{g}/\partial \mathbf{x}^1+\partial \mathbf{g}/\partial \mathbf{x}^2\ \partial \mathbf{h}/\partial \mathbf{x}^1 = 0$$

donde la matriz (*mxn*) de las $\partial \mathbf{g}/\partial \mathbf{x}^2$ por la hipótesis jacobiana es una matriz regular con inversa. Por consiguiente:

$$\partial \mathbf{h}/\partial \mathbf{x}^1= - (\partial \mathbf{g}/\partial \mathbf{x}^2)^{-1}\ (\partial \mathbf{g}/\partial \mathbf{x}^1),$$

y las condiciones [5] pueden expresarse así:

[6] $$\partial F/\partial \mathbf{x}^1 - (\partial F/\partial \mathbf{x}^2)\ (\partial \mathbf{g}/\partial \mathbf{x}^2)^{-1}\ (\partial \mathbf{g}/\partial \mathbf{x}^1) = \mathbf{0},$$

$$\partial F/\partial \mathbf{x}^2 - (\partial F/\partial \mathbf{x}^2)\ (\partial \mathbf{g}/\partial \mathbf{x}^2)^{-1}\ (\partial \mathbf{g}/\partial \mathbf{x}^2) = \mathbf{0}.$$

Haciendo $\boldsymbol{\lambda}=(\partial F/\mathbf{x}^2)\ (\partial \mathbf{g}/\partial \mathbf{x}^2)^{-1} = (\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_m)$ las condiciones necesarias [6] pueden ser escritas:

$$\partial F/\partial \mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}\ (\partial \mathbf{g}/\partial \mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

condición que puede ser obtenida junto con las restricciones derivando la función *lagrangiana*:

[7] $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \equiv F(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}\,(\mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x}))$

con respecto a los instrumentos y a $\boldsymbol{\lambda}$.

Podemos establecer, por consiguiente, que un punto *extremal* de $F(\mathbf{x})$ bajo las restricciones $\mathbf{g}(\mathbf{x})=\mathbf{b}$ constituye un candidato para un máximo o un mínimo de dicha función derivando la función $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ con respecto a cada uno de sus argumentos, igualando a cero dichas derivadas y obteniendo la solución correspondiente. Ello conduce a las condiciones *necesarias* denominadas de primer orden.

Las condiciones *necesarias* de segundo orden establecen que la matriz hessiana de las derivadas parciales de segundo orden de la función lagrangiana con respecto a los instrumentos $\partial^2 L/\partial \mathbf{x}^2$ sea definida negativa o semidefinida negativa en el punto máximo local $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ sujeta a las *m* condiciones

[8] $d\mathbf{g} = \partial \mathbf{g}/\partial \mathbf{x}\,\big|_{\mathbf{x}^*}\, d\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Si esta matriz hessiana es definida negativa sujeta a las restricciones precedentes entonces las condiciones de primer orden son *suficientes* para un máximo local. Las condiciones de que la matriz hessiana sea definida negativa sujeta a las restricciones [8] pueden desarrollarse como *n-m* condiciones sobre el signo de ciertos determinantes de submatrices de la matriz *(m+n)x(m+n)* que se obtiene "orlando" la matriz hessiana con la matriz jacobiana de las funciones de restricción:

[9]

$\mathbf{0}$	$\partial \mathbf{g}/\partial \mathbf{x}$
$\partial \mathbf{g}'/\partial \mathbf{x}$	$\partial^2 L/\partial \mathbf{x}^2$

siendo las condiciones para el máximo local que los últimos *n-m* menores principales de esta matriz hessiana orlada sean de signo alternado, con el signo del primero igual a $(-1)^{m+1}$. Para un mínimo, se requiere que todos los determinantes especificados tengan el signo de $(-1)^m$.

Los multiplicadores de Lagrange no son una injerencia extraña, ya que aportan valiosa información respecto al problema, de acuerdo con el siguiente resultado:

Teorema Los multiplicadores de Lagrange óptimos satisfacen la igualdad:

[10] $\boldsymbol{\lambda}^* = \partial F(\mathbf{x}^*)/\partial \mathbf{b}$.

Por consiguiente, miden el *grado de sensibilidad del valor óptimo de la función objetivo a las variaciones en las constantes de restricción* **b**.

Dem. Considerando las condiciones de primer orden, escribimos:

$$\Psi^1(\mathbf{b}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x}) \equiv \mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$$
$$\Psi^2(\mathbf{b}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x}) \equiv \partial F/\partial \mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}\, \partial \mathbf{g}(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x} = 0,$$

que es un sistema de *2m+n* variables $(\mathbf{b}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x})$. La matriz jacobiana de este sistema es de rango fila completo, suponiendo que se dan las condiciones suficientes de la matriz hessiana orlada [9].

Ello posibilita, mediante la aplicación del teorema de la función implícita, resolver el sistema de $m+n$ condiciones de primer orden despejando los instrumentos y multiplicadores de Lagrange como funciones de las constantes de restricción:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x(b)}$$
$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{(b)}.$$

La función lagrangiana puede tratarse ahora como una función de las constantes de restricción:

$$L(\mathbf{b}) = F(\mathbf{x(b)}) + \boldsymbol{\lambda}\mathbf{(b)\ [b - g(x(b))]}.$$

Derivando con respecto a **b** se tiene:

$$\partial L/\partial \mathbf{b} = \partial F/\partial \mathbf{x}\ \partial \mathbf{x}/\partial \mathbf{b} - \boldsymbol{\lambda}\ \partial \mathbf{g}/\partial \mathbf{x}\ \partial \mathbf{x}/\partial \mathbf{b} + \mathbf{(b - g(x))'}\ \partial \boldsymbol{\lambda}'/\partial \mathbf{b} + \boldsymbol{\lambda} =$$

$$= (\partial F/\partial \mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}\ \partial \mathbf{g}/\partial \mathbf{x})\ (\partial \mathbf{x}/\partial \mathbf{b}) + \mathbf{(b - g(x))'}\ \partial \boldsymbol{\lambda}'/\partial \mathbf{b} + \boldsymbol{\lambda}.$$

En la solución $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ los dos primeros términos del segundo miembro se anulan en virtud de las condiciones de primer orden ya vistas, de tal forma que la modificación de la función lagrangiana es igual al vector de multiplicadores de Lagrange. Pero en la solución, el valor de esta función es el valor óptimo de la función objetivo (ver [7]). Luego:

$$\partial L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)/\partial \mathbf{b} = \partial F^*/\partial \mathbf{b} = \boldsymbol{\lambda}^*.$$

Los multiplicadores de Lagrange tienen una interesante interpretación económica en modelos de asignación de recursos en donde la función objetivo tiene la dimensión de un valor – o sea, precios por cantidades (por ejemplo, beneficios, ingresos, costos) – y las restricciones determinan un valor dado para una cierta cantidad de un bien. El multiplicador de Lagrange mide la sensibilidad del valor a la cantidad del bien. Si el bien es un factor productivo, el multiplicador será no negativo y recibe el nombre de *precio sombra* o *seudoprecio* del factor.

5. Programación no lineal: las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker

En matemáticas, las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (también conocidas como las condiciones KKT o de Kuhn-Tucker) son condiciones necesarias y suficientes para que la solución de una programación no lineal séa óptima. Es una generalización del método de los Multiplicadores de Lagrange. Consideremos el problema siguiente de optimización no lineal:

$$\text{Mín}_x\ F(\mathbf{x})$$
$$\text{sujeto a } g_i(\mathbf{x}) \leq 0,\ h_j(\mathbf{x}) = 0 \quad (i=1, ..., m)\ (j=1,..., l) \qquad [11]$$

donde $F(\mathbf{x})$ *es la función a ser minimizada,* $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$ son las restricciones de desigualdad (entre las cuales puede estar incluída la no negatividad de los instrumentos, $x \geq 0$) y m y l son el número de restricciones de desigualdad e igualdad, respectivamente. Las condiciones necesarias para problemas con restricciones de desigualdad fueron publicadas por primera vez en la Tesis doctoral de W. Karush[5], aunque fueron renombradas tras un artículo en una conferencia de Harold W. Kuhn y Albert W. Tucker[6].

[5] W. Karush (1939). "Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Constraints". M.Sc. Dissertation. Dept. of Mathematics, Univ. of Chicago, Chicago, Illinois.

Condiciones necesarias Supongamos que la función objetivo a minimizar es $F: R^n \to R$ y las funciones de restricción son $g_i: R^n \to R$, $h_j: R^n \to R$. Además se supondrá que son continuamente diferenciables en el punto **x***. Si **x*** es un mínimo local, entonces existen constantes $\lambda \geq 0$, $\mu_i \geq 0$ $(i=1, ..., m)$ y v_j $(j=1, ..., l)$ tales que:

$$\lambda + \sum_{i=1}^{m} \mu_i + \sum_{j=1}^{l} |\nu_j| > 0,$$
$$\lambda \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{l} \nu_j \nabla h_j(x^*) = 0,$$
$$\mu_i g_i(x^*) = 0 \text{ para todo } i = 1, \ldots, m.$$

Condición de calificación de las restricciones En la condición necesaria anterior, el multiplicador dual λ puede ser igual a cero. Este caso se denomina *degenerado o anormal*. La condición necesaria no tiene en cuenta las propiedades de la función sino la geometría de las restricciones. Existen condiciones de regularidad que aseguran que la solución no es degenerada (es decir $\lambda \neq 0$). Éstas incluyen distintas versiones:

1) Cualificación de la restricción de independencia lineal (CRIL): los gradientes de las restricciones activas[7] de desigualdad y los gradientes de las restricciones de igualdad son linealmente independientes en **x***.

2) Cualificación de la restricción de Mangasarian-Fromowitz (CRMF): los gradientes de las restricciones activas de desigualdad y los gradientes de las restricciones de igualdad son linealmente independientes positivos en **x*** ($\{v_1, ..., v_n\}$ es linealmente dependiente positivo si existen $a_1 \geq 0, ..., a_n \geq 0$ distintos de cero tales que $a_1 v_1 + ...+ a_n v_n = 0$).

3) Cualificación de la restricción de rango constante (CRRC): para cada subconjunto de las restricciones activas de desigualdad y los gradientes de las restricciones de igualdad, el rango en el entorno de **x*** es constante.

4) Cualificación de la restricción de dependencia lineal constante positiva (DLCP): para cada subconjunto de restricciones activas de desigualdad y de gradientes de las restricciones de igualdad, si es linealmente dependiente positivo en **x*** entonces es linealmente dependiente positivo en el entorno de **x***.

5) Condición de Slater: para un problema únicamente con restricciones de desigualdad, existe un punto **x** tal que $g_i(\mathbf{x})<0$ para todo $i=1, ..., m$.

Puede demostrarse que CRIL→CRMF→DLCP, CRIL→CRRC→DLCP, aunque CRMF no es equivalente a CRRC. En la práctica, se prefiere una cualificación de restricciones más débil ya que proporciona condiciones de optimalidad más fuertes.

[6] H. W. Kuhn,Tucker, A. W., Proceedings of 2nd Berkeley Symposium, Nonlinear programming, University of California Press, 1951, Berkeley.

[7] Una restricción de desigualdad es “activa” en un punto si se verifica como igualdad en dicho punto.

Condiciones suficientes. Sea la función objetivo $F: R^n \rightarrow R$, las funciones de restricción $g_i: R^n \rightarrow R$, convexas[8] y las funciones afines $h_j: R^n \rightarrow R$. Sea dado un punto factible **x***. Si existen constantes $\mu_i > 0$ $(i=1, ..., m)$ y ν_j $(j=1, ..., l)$ tales que se verifica lo siguiente:

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{l} \nu_j \nabla h_j(x^*) = 0$$

$$\mu_i g_i(x^*) = 0 \text{ para todo } i = 1, \ldots, m,$$

entonces el punto **x*** es un mínimo global.

Función valor Si reconsideramos al problema de optimización como un problema de maximización

$$\max_x \quad f(x)$$

sujeto a:

$$g_i(x) \leq a_i, h_j(x) = 0$$

La función valor está dada por:

$$V(a_1, \ldots a_n) = \sup_x \quad f(x)$$

sujeto a:

$$g_i(x) \leq a_i, h_j(x) = 0$$
$$j \in \{1, \ldots l\}, i \in 1, \ldots, m$$

En esta definición, cada coeficiente λ_i es la tasa a la que crece la función valor a medida que aumenta a_i. Luego, si cada a_i fuera interpretado como una restricción de recursos, los coeficientes nos indican en cuánto se incrementará el valor óptimo de nuestra función *f*. Esta interpretación es especialmente útil en economía, en los problemas de maximización de la utilidad, por ejemplo.

6. Teoría de los juegos

El término *economía* fue utilizado por primera vez por los filósofos de la antigua Grecia, interesados en estudiar todas las instituciones de la sociedad civilizada. No desarrollaron una especialización académica en el tema de los mercados en forma excluyente. Un siglo antes de Cournot, un número creciente de escritores construyeron teorías matemáticas sobre el crecimiento y asignación del ingreso nacional. Producción y distribución de los bienes materiales parecían más apropiados para el análisis matemático que otros aspectos de las ciencias sociales, dado que los

[8] Una función a valores reales $f(\mathbf{x})$ definida sobre un conjunto convexo *X* es *convexa* cuando, dados dos puntos distintos cualesquiera **x** e **y** de *X* se verifica $f(a\mathbf{x}+(1-a)\mathbf{y}) \leq a f(\mathbf{x}) + (1-a) f(\mathbf{y})$ para toda a, $0<a<1$. Es *estrictamente convexa* cuando se cumple la desigualdad estricta. Geométricamente, una función en el plano es convexa si, y sólo si, el segmento que une dos puntos cualesquiera no está por debajo de la curva que representa la función: o sea que la interpolación lineal no es una estimación inferior del valor de la función. Una función $f(\mathbf{x})$ *es* cóncava si y solamente si $-f(\mathbf{x})$ *es convexa, y es* estrictamente cóncava *si, y sólo si,* $-f(\mathbf{x})$ *es estrictamente convexa.* Una función lineal es convexa y cóncava al mismo tiempo, pero no es estrictamente convexa ni estrictamente cóncava.

flujos de dinero y bienes en un mercado pueden ser cuantificados fácilmente y los sistemas de ecuaciones para precios y cantidades de un mercado pueden derivarse directamente de condiciones de ausencia de arbitraje y equilibrio de flujos. Los marginalistas trabajaron sobre una teoría más profunda de la oferta y la demanda en los mercados, basándose en modelos de decisiones competitivas racionales de productores y consumidores. Pareció natural aplicar esos análisis de elección racional a problemas sociales distintos.

Pero la aplicación del análisis de decisiones racionales fuera del mercado requería un andamiaje analítico más general de toma de decisiones al no existir las estructuras tradicionales de mercados de bienes y servicios. Los primeros teóricos en juegos fueron en búsqueda de este andamiaje. El punto de cambio crítico fue la teoría de los juegos no cooperativos de Nash, al permitir extender el alcance del análisis de la elección racional a situaciones competitivas generales.

7. <u>Economía, racionalidad e instituciones: Los Equilibrios de Nash</u>

Si la racionalidad perfecta resulta tan inapropiada como una descripción de la conducta humana – los estudios experimentales de las decisiones detectan conductas inconsistentes y estúpidas que violan las predicciones de la racionalidad perfecta – cabe preguntarse por qué este supuesto de racionalidad perfecta ha sido tan fructífero en el análisis económico como para no dar lugar a ninguna otra teoría del comportamiento. Una respuesta es que aún no han sido desarrolladas teorías que resulten analíticamente tratables de la inconsistencia y estupidez humanas, por lo que nos quedamos con nuestro supuesto de racionalidad a falta de otro mejor. Una segunda respuesta es que, a largo plazo – cuando lo que está en juego es muy importante – deberíamos esperar que la conducta de la gente se aproxime más al ideal de racionalidad perfecta que en los experimentos de laboratorio.

Pero un tercer motivo, más convincente, es que el objetivo funcional de las ciencias sociales no consiste sólo en predecir la conducta humana a nivel abstracto, sino en analizar instituciones sociales y evaluar propuestas de reforma institucional. Cuando queremos apreciar los defectos potenciales de una institución social, puede resultar muy útil analizar a la institución suponiendo que sus agentes no tienen defectos, porque en caso contrario no sabríamos si lo que encontramos es un argumento para reformar a la institución o un argumento para una mejor educación de los individuos. Esto último pertenece más bien al campo de la psicología, donde los supuestos de perfección individuales son bastante menos razonables.

Este argumento puede ser afilado para mostrar por qué el supuesto de perfección individual debería ser uno de maximización racional inteligente, como en los modelos de los juegos no cooperativos. Estos modelos incluyen 1) una descripción de las instituciones estudiadas, y 2) una predicción del comportamiento probable en estas instituciones. A fin de manejar cuestiones normativas, también debe incorporarse algún concepto de bienestar humano dentro del modelo. Un argumento de reforma de las instituciones sociales es más persuasivo cuando se basa en un modelo que supone que los agentes entienden en forma inteligente su entorno y actúan racionalmente para maximizar su propio bienestar. Los teóricos sociales aplicados encontraron útil examinar a las instituciones suponiendo que cada miembro actuará, dentro de su campo de acción de manera de maximizar el bienestar tal como él mismo lo evalúa, dada la conducta predicha de los demás. En esencia, el concepto de equilibrio de Nash es una formulación general de este enfoque.

En un artículo de *una página* de 1950[9] John Forbes Nash formuló la noción de equilibrio que lleva su nombre y produjo una revolución en la economía y en partes de otras disciplinas. Por entonces un joven estudiante de la universidad de Princeton, formó parte del Camelot de teoría de los juegos alrededor de von Neumann y Morgenstern que habían escrito su libro[10] para extender el análisis económico y permitir a los economistas modelar las "reglas del juego" que influyen sobre acontecimientos particulares y extender el alcance de la teoría económica a fin de incluir las situaciones estratégicas de grupos pequeños en donde cada persona debe tratar de anticipar las acciones de los demás. La definición de von Neumann y Morgenstern estaba confinada al caso especial de los juegos bipersonales de suma cero, en los que lo que gana un jugador es igual a la pérdida del otro, de modo que la suma de los pagos siempre es cero. La propuesta de Nash es mucho más amplia, ya que no implica restricciones sobre la estructura de los pagos o el número de jugadores. Ésta fue una de las bases de la revolución que produjo en economía y de que 44 años más tarde se le adjudicara el premio Nobel.

La primera parte de ese artículo introduce el modelo de un juego con N participantes o "jugadores", cada uno de los cuales debe elegir un curso de acción o "estrategia": "Podemos definir el concepto de un juego N-personal en el que cada jugador tiene un conjunto finito de estrategias puras y donde hay un conjunto definido de pagos a los N jugadores de estrategias puras, cada una de las cuales es adoptada por cada jugador". La noción de estrategia es bastante general, ya que incluye estrategias "mixtas" que consisten en distribuciones de probabilidad sobre las decisiones, por ejemplo un auditor que audita sobre una base aleatoria, o un jugador de poker que a veces hace *bluff* (miente). Otra interpretación posible de una estrategia mixta es la de una población asumiendo aletoriamente el papel de cada jugador del juego, algunos de los cuales toman decisiones sobre las elecciones posibles. La idea del equilibrio de Nash es que un conjunto de estrategias – una para cada jugador – sería estable si nadie tuviera un incentivo unilateral a desviarse de su propia estrategia: "Toda N-upla de estrategias, una para cada jugador, puede ser vista como un punto en el espacio producto obtenido mediante la multiplicación de los N espacios de estrategia de los jugadores. Una N-upla de tal tipo contrarresta a otra si la estrategia de cada jugador en la N-upla que contrarresta genera la expectativa más elevada que puede obtener este jugador en contra de las N-1 estrategias de los otros jugadores en la N-upla contrarrestada. Una N-upla que se contrarresta a sí misma es denominada un punto de equilibrio." Es decir, un equilibrio de Nash es un conjunto de estrategias, una para cada uno de los N jugadores del juego, con la propiedad de que la elección de cada jugador es su mejor respuesta a las elecciones de los restantes N-1 jugadores. Sobreviviría a una prueba de anuncio anticipado: si todos los jugadores anunciaran sus estrategias en forma simultánea, nadie querría reconsiderar su acción.

Este concepto ha encontrado múltiples aplicaciones en economía, en particular por la variedad de interpretaciones que puede tener. Si el objetivo fuera asesorar a todos los jugadores del juego (es decir, aconsejarlos acerca de qué estrategia debería elegir cada uno), cualquier consejo que no fuera de equilibrio tendría la inquietante propiedad de que siempre habría algún jugador para el cual el consejo sería inapropiado, en el sentido de que, si todos los demás jugadores siguieran la parte del consejo que les corresponde, a alguno le parecería mejor seguir otra conducta diferente a la sugerida. Si el consejo es un equilibrio éste no será el caso. Este punto de vista a veces es usado para derivar predicciones sobre lo que harán los demás, si pueden ser considerados como jugadores "perfectamente racionales" al practicar sus cálculos.

---

[9] Nash, J.F. (1950), Equilibrium Points in N-Person Games, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA 36.*

[10] Von Neumann, J. & Morgenstern, O. (1944) *Theory of Games and Economic Equilibrium* (Princeton Univ. Press, Princeton).

Cuando el objetivo es la predicción más que la prescripción, un equilibrio de Nash puede ser interpretado como un punto potencialmente estable de un proceso de ajuste dinámico en el que los individuos van ajustando su comportamiento en función del de los otros jugadores del juego, buscando elecciones estratégicas que les proporcionarán mejores resultados. Este punto de vista también ha dado resultados en biología: cuando las estrategias mixtas son interpretadas como la proporción de la población que elige una dentro de un conjunto de estrategias, los pagos del juego son interpretados como cambios de la aptitud biológica resultante del juego, y la dinámica es interpretada como la dinámica de la población[11]. Por supuesto, en este caso no hay presunción de racionalidad, sino una simple dinámica egoista. Este enfoque evolutivo también ha atraído a los economistas[12] .

Una tercera interpretación es la de que un equilibrio de Nash es un acuerdo de auto-cumplimiento, es decir, un acuerdo implícito o explícito que, una vez alcanzado por los jugadores, no requiere de ningún otro medio para hacerlo cumplir, porque radica en el interés propio de cada jugador cumplir con el acuerdo si los otros también lo hacen. Visto de esta manera, el equilibrio de Nash ayuda a clarificar una distinción que a veces se realiza entre juegos "cooperativos" y "no cooperativos", donde los cooperativos son aquellos cuyos acuerdos pueden ser ejecutados (por ejemplo por medio de un juez), y los no cooperativos en los que se carece de un mecanismo de ejecución. La tendencia de la teoría moderna de los juegos, a veces mencionada como el "programa de Nash", es la de borrar esta distinción incluyendo a cualquier mecanismo de ejecución dentro del modelo del juego, de modo que todos los juegos pueden ser modelizados como no cooperativos. Nash adoptó pasos preliminares en esta dirección en su temprano e influyente modelo de la negociación como un juego cooperativo y luego como un juego no cooperativo[13] .

El artículo de 1950 no solamente formuló la definición de equilibrio sino también anunció la prueba de existencia que obtuvo usando el teorema de punto fijo de Kakutani. "Estoy al tanto de que el teorema generalizado de punto fijo de S. Kakutani estuvo inspirado en mejorar algunos argumentos hechos por von Neumann en un contexto económico en los 1930s." Nash compartió el premio Nobel 1994 con John Harsanyi y Reinhard Selten. Harsanyi fue citado como habiendo extendido el equilibrio de Nash a una clase más amplia de juegos de información incompleta, donde los jugadores pueden no conocer las preferencias y elecciones factibles de los demás. Selten fue citado por su trabajo sobre refinaciones del equilibrio, que adopta el punto de vista de que las condiciones del equilibrio de Nash son necesarias para asesorar a jugadores perfectamente racionales pero no son suficientes, y que pueden existir equilibrios superfluos que pueden eliminarse de la consideración mediante una refinación apropiada que preste atención a un subconjunto de equilibrios de Nash. El equilibrio de Nash ha sido extendido, refinado y generalizado también en otras direcciones. Por ejemplo, el tratamiento hecho por R. J. Aumann (1974) de los "equilibrios correlacionados" que considera no solamente las estrategias randomizadas en forma independiente para cada jugador sino también estrategias conjuntamente randomizadas que permiten la coordinación entre grupos de jugadores.

8. Precursores: Cournot, Borel y von Neumann

Dada la sencillez lógica del concepto de solución de Nash, es sorprendente que este concepto no haya sido articulado mucho antes dentro de la historia de las ciencias sociales. Por ejemplo,

---

[11] Hoffbauer, J. & Sigmund, K. (1988), *The Theory of Evolution and Dynamical Systems, Cambridge Univ. Press, Cambridge, U.K.* También Maynard-Smith, J. (1974) *J. Theor. Biol., 47.*
[12] Weibull, J.W. (1995), *Evolutionary Game Theory, MIT Press, Cambridge, USA.*
[13] Nash, J.F. (1950; 1953), *Econometrica 18, 21.*

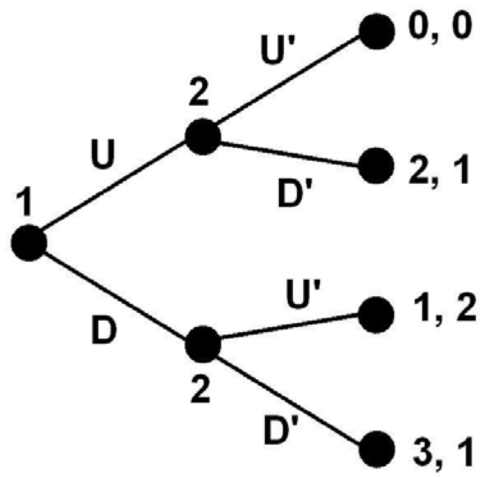
reformular las ideas de Maquiavelo y Hobbes mediante los modelos de la teoría de los juegos no cooperativos puede ser un ejercicio interesante y gratificante. Pero la primera aplicación clara del equilibrio de Nash en un modelo matemático preciso se remonta a Cournot. En un libro brillante[14] elaboró una teoría de las firmas oligopolísticas que incluye al monopolio y a la competencia perfecta como casos límite. Desarrolló modelos de competencia oligopolística que analizó siguiendo la metodología del equilibrio de Nash. Pero como estaba escribiendo más de un siglo antes que Nash, uno tiene derecho a preguntarse si deberíamos acreditarle el concepto de equilibrio no cooperativo. Algunos economistas han sugerido que en lugar de hablar de un "equilibrio de Nash" deberíamos decir un "equilibrio Cournot-Nash" o simplemente "equilibrio de Cournot". Pero esto sería un error, porque confundiríamos una aplicación de una metodología con su formulación general. Lectores de Bertrand[15] hasta Fellner[16] desarrollaron modelos específicos del oligopolio con algunas aplicaciones interesantes, pero que aparentemente tenían algunos supuestos no válidos. En particular, una vez que Cournot ha demostrado que el producto óptimo de la firma 2 depende del producto de la firma 1, puede parecer irracional que el empresario de la firma 1 suponga que el producto de la firma 2 permanecería constante si cambiara el producto de la firma 1. La metodología de Cournot no parecía una teoría convincente del comportamiento racional.

La respuesta provino de un comentario en un breve paper del matemático Émile Borel[17] en el cual consideró una clase de juegos bipersonales simples. Borel se proponía "investigar si es posible determinar un método de jugarlo mejor que todos los demás". Mientras escribía la estructura formal del juego, Borel notó que un *método de juego* debería entenderse como "un código que determina exactamente para cada circunstancia (supuestas en número finito) lo que la persona debería hacer." Dicho lo cual, Borel se permitió ignorar las estructuras de los juegos extendidas a través del tiempo. A partir de entonces Borel representó a cada juego por una matriz numérica que especifica el valor esperado de cada jugador para cada par de métodos de juego.

La primera gran contribución de John von Neumann a la teoría de los juegos[18] comienza con una sección intitulada "Simplificaciones Generales" que plantea un desarrollo pleno de esta idea. En esta sección, von Neumann formuló explícitamente un modelo general de los juegos extensivos, donde los jugadores juegan en forma secuencial a través del tiempo, con información imperfecta sobre los movimientos previos de los otros jugadores. Como los jugadores van obteniendo alguna información sobre los movimientos previos de los demás jugadores, no es el caso de suponer que las jugadas de los jugadores son independientes en los juegos extensivos. Pero, siguiendo a Borel, von Neumann definió una estrategia para cada jugador como un plan completo que especifica una jugada para cada jugador en cada etapa en la que está activo. Un jugador racional puede elegir su estrategia antes de que comience el juego, sin pérdida de generalidad, porque una estrategia le permite especificar una jugada diferente en cada situación en que se halle durante el juego. Pero el enunciado "antes de que comience el juego" significa "antes de que puedan ser observadas las consecuencias de las decisiones de los otros jugadores". Luego, von Neumann concluye esta sección afirmando que cada jugador debe elegir su estrategia sin ser informado de las elecciones estratégicas de los demás.

[14] Cournot, Augustin (1838), *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses, Paris, Hachette.*
[15] Bertrand, Joseph (1883), *Review of Walras's 'Théorie mathématique de la richesse sociale' and Cournot's 'Recheches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses'', Journal des Savants, 67.*
[16] Fellner, William (1949), *Competition Among the Few, New York, Knopf.*
[17] Borel, Émile (1921), *La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique gauche, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 173.*
[18] Von Neumann, John (1928) *Zur Theories der Gesellschaftsspiele, Mathematische Annalen, 100.*

Luego von Neumann sostenía que virtualmente cualquier juego competitivo puede ser modelizado como un juego matemático con la siguiente estructura: Hay un conjunto de jugadores, cada jugador dispone de un conjunto de estrategias, cada jugador tiene una función de pagos (o de utilidad) definida sobre el producto cartesiano de estos espacios de estrategias a valor real, y cada jugador debe elegir su estrategia en forma independiente de los demás jugadores.



Un Juego en forma secuencial

En un juego de dos personas tenemos una *matriz de pagos* Π_{ij} de *m* filas *y n* columnas en el que el jugador *fila* (1) elige la estrategia correspondiente a la fila *i*-ésima de la matriz y el jugador *columna* (2) elige la que corresponde a la columna *j*-ésima de dicha matriz. Estos juegos son denominados *juegos de matriz* ya que el jugador 1 trata de elegir una fila de la matriz de modo tal que maximice su entrada, y el jugador 2 elige una columna que minimice la entrada. En efecto, la matriz Π_{ij} muestra los pagos del jugador (1) y será denotada como Π_{ij}^{1} . Los pagos del jugador (2) vienen dados por Π_{ij}^{2} . En un juego de suma cero, $\Pi_{ij}^{1} = - \Pi_{ij}^{2}$.

Como los resultados del análisis no se ven afectados al añadir una constante a cada elemento de la matriz, todos los *juegos de suma constante* representados por

$$\Pi_{ij}^{1} + \Pi_{ij}^{2} = \text{constante}$$

pueden ser reducidos a un juego de matriz de la siguiente forma: los pares de elementos serán (Π_{ij}^{1}, constante - Π_{ij}^{1}) y restando la mitad de la constante a cada elemento se tiene finalmente $\Pi_{ij}^{1} = -\Pi_{ij}^{2}$. Los juegos de suma constante pueden ser descritos luego mediante una única matriz.

Von Neumann y Morgenstern denominaron a ésta la forma normal de representar a juegos extensivos[19] . Una vez que se entiende la construcción de la forma normal, se percibe que no existe pérdida de generalidad en estudiar juegos donde los jugadores toman sus decisiones estratégicas de manera independiente. Este punto de vista nos permite aceptar el supuesto básico de Cournot de que los competidores toman sus decisiones de forma independiente. Tal vez la firma 2 basó su producción del año próximo en la producción de la firma 1 de este año; pero esto solamente implica que 2 tiene un espacio de estrategias más amplio que el admitido por Cournot. A nivel del planeamiento estratégico, siempre podemos suponer que la firma 2 elige su estrategia

[19] Von Neumann, John and Oskar Morgenstern (1944) *Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press. Second edition, 1947. Third edition, 1953.*

en forma independiente de la elección de la firma 1. Esta idea de independencia estratégica general no fue reconocida por Cournot ni por los economistas teóricos hasta que aprendieron la idea de von Neumann. Aunque von Neumann[20] le cedio crédito a Borel por el concepto básico de estrategia, es difícil imaginar cómo los economistas hubieran podido aprender el principio general de independencia estratégica a partir de la breve observación de Borel. Por consiguiente, la primera contribución importante de von Neumann a la teoría de los juegos es la exposición completa de la forma normal y del concepto de independencia estratégica.

Von Neumann también agregó dos restricciones a la forma normal que limitaban seriamente su pretensión de ser un modelo general de interacción en todas las ciencias sociales: supuso que los pagos son transferibles, y que todos los juegos son de suma cero. Su segunda gran contribución a la teoría de los juegos fue el teorema minimax. Una estrategia minimax es tal que cada jugador trata de elegir la estrategia que maximiza su pago ante la mejor estrategia jugada por su rival, de modo que (1) resuelve el problema

$$\text{Máx}_i \ \text{Mín}_j \ \Pi_{ij}^{1},$$

maximizando sobre el conjunto de los mínimos de fila (*estrategia maximin*). (2) trata análogamente de asegurarse el pago más alto (que implica el pago más bajo de su oponente) sin tener en cuenta la estrategia elegida por su oponente. Selecciona la estrategia *j* que resuelve el problema

$$\text{Mín}_j \ \text{Máx}_i \ \Pi_{ij}^{1},$$

es decir una *estrategia minimax.* Estas estrategias son compatibles cuando

$$\text{Máx}_i \ \text{Mín}_j \ \Pi_{ij}^{1} = \text{Mín}_j \ \text{Máx}_i \ \Pi_{ij}^{1} = \Pi_{ij}^{*}$$

En este caso se dice que la matriz tiene un *punto de silla* en Π_{ij}*. Los juegos con estas características son denominados *juegos estrictamente determinados*, como el ejemplo incluído a continuación:

2	1	4
-1	0	6

El *valor del juego (V)* resulta igual a 1. Pero no todos los juegos de suma cero están estrictamente determinados, verificándose que $\text{Máx}_i \ \text{Mín}_j \ \Pi_{ij}^{1} \leq \text{Mín}_j \ \text{Máx}_i \ \Pi_{ij}^{1}$. Mas el concepto de solución sigue siendo válido si introducimos estrategias *randomizadas* (o *mixtas*). Una estrategia mixta del jugador 1 es un vector (fila) de probabilidades $\mathbf{p}^1 = (p_1^1, p_2^1, ..., p_m^1)$ donde p_i^1 es la probabilidad de seleccionar la estrategia *i*-ésima. Naturalmente, las probabilidades deben sumar la unidad. Introducimos para el jugador 2 un vector $\mathbf{p}^2 = (p_1^2, p_2^2, ... p_n^2)$ donde p_j^2 es la probabilidad de elegir la estrategia *j*-ésima. El jugador 1, buscando el más alto pago esperado garantizado, elige su vector de probabilidad de modo que maximice el pago mínimo esperado, es decir:

$$\text{Máx}_{p1} \ \Pi^1(\mathbf{p}^1) = \text{Máx}_{p1} \ \text{Mín}_j \ \mathbf{p}^1 \boldsymbol{\Pi} \mathbf{e}'_j$$

siendo $\boldsymbol{\Pi}$ la matriz de pagos y $\mathbf{e}'_j$ el vector de la matriz unidad. Análogamente, el jugador 2, si emplea el vector de probabilidad $\mathbf{p}^2$ intentará hacer mínimo el pago esperado, eligiendo $\mathbf{p}^2$ de la manera siguiente:

[20] Von Neumann, John (1953) *Communication on the Borel notes, Econometrica, 21.*

$$\text{Mín}_{p2}\, \Pi^2(\mathbf{p^2}) = \text{Mín}_{p2}\, \text{Máx}_i\, \mathbf{e'}_i\, \mathbf{\Pi}\, \mathbf{p^2}.$$

El teorema minimax afirma la existencia de soluciones $\mathbf{p^{1*}}$ y $\mathbf{p^{2*}}$ tales que:

$$V = \text{Máx}_{p1}\, \text{Mín}_{p2}\, \mathbf{p^1 \Pi p}^2 = \text{Mín}_{p2}\, \text{Máx}_{p1}\, \mathbf{p^1 \Pi p}^2.$$

Este teorema, demostrado en 1928, mostró la existencia general de soluciones minimax en estrategias randomizadas para juegos bipersonales finitos de suma cero. En tales juegos, el teorema minimax es lógicamente equivalente a la existencia de un equilibrio de Nash. Von Neumann admitió en 1928 que la existencia de soluciones de minimax para juegos bipersonales de suma cero podría no darse si no se admitiera el uso de estrategias randomizadas. Para analizar juegos randomizados, empero, necesitamos una teoría de cómo los jugadores toman decisiones frente a la incertidumbre. Había utilizado en 1928 el tradicional supuesto originado en Bernoulli (1738) de que, enfrentado a incertidumbre, cada jugador desea maximizar el valor esperado de su utilidad o pago. Pero estaba disconforme con este supuesto. Las comparaciones de valor esperado requieren cierto tipo de cardinalidad de la utilidad, que contradecía a la sabiduría corriente entre los economistas teóricos que por entonces consideraban a la utilidad como un concepto puramente ordinal. En 1928 y en el libro de 1944, von Neumann trató de justificar el supuesto de utilidad cardinal identificando a todos los pagos con transferencias monetarias, lo cual lo condujo a la restricción de pagos transferibles y juegos de suma cero. Es cierto que el teorema minimax fue un hallazgo posibilitado por esta hipótesis, pero la discusión en el libro de 1944 muestra la intención de postergar el problema de medición de utilidades.

En la segunda edición del libro (1947) el libro incluyó la tercera gran contribución a la teoría de los juegos: la derivación axiomática de la maximización de la utilidad esperada a partir de un argumento de sustitución. Para 1948 von Neumann y Morgenstern habían desarrollado varios elementos fundamentales de la teoría de los juegos: las formas extensiva y normal vinculadas mediante el concepto de estrategia, el uso de teoremas de punto fijo para demostrar la existencia de soluciones de juegos con randomización, y una derivación general del criterio de utilidad esperada en la toma de decisiones de los individuos. Pero en su impulso de ensamblar los distintos elementos, von Neumann y Morgenstern no los aplicaron de modo consistente. Cuando John Forbes Nash, Jr., llegó a Princeton como recién graduado, el tiempo estaba maduro para que un joven matemático talentoso reconsiderase la estructura de la teoría desde su propio punto de vista, separase los elementos y los re-ensamblara en forma correcta.

9. <u>La reconstrucción de Nash de la teoría de los juegos</u>

La primera gran contribución de Nash fue su teoría de la negociación bipersonal[21]. Introdujo una solución novedosa en la literatura en el primer paper de teoría de los juegos que no asumió utilidad transferible. La teoría descansa en el punto de vista de que las escalas de utilidad de los individuos pueden ser definidas hasta una transformación lineal creciente, como en la derivación que hicieran von Neumann y Morgenstern en 1947 (2ª edición de su libro).

En noviembre de 1949 los Proceedings de la National Academy of Sciences recibieron la breve nota publicada en 1950 sobre equilibrio en juegos planteados en la forma normal, usando el teorema de punto fijo de Kakutani. A partir de entonces, Nash presentó cierto número de ejemplos interesantes ilustrando problemas que habían obsesionado a los teóricos de juegos desde hacía

[21] Nash, Jr., John F., (1950) *The Bargaining problem, Econometrica, 18.*

mucho tiempo, incluso un juego con un equilibrio Pareto-ineficiente como el Dilema del Prisionero (ver 7.), un juego con equilibrios múltiples, y un juego con un equilibrio inestable que muestra la necesidad de refinamientos (como el de equilibrio perfecto)[22]. Pero la contribución más importante y novedosa de Nash de 1951 fue su argumento de que su concepto de equilibrio no cooperativo, juntamente al de forma normal de von Neumann, nos proporciona una metodología completa y general para analizar todos los juegos. De esta manera, Nash llevó a las ciencias sociales a un nuevo mundo donde una estructura analítica unificada puede estudiar todas las situaciones de cooperación y de conflicto. La forma normal de von Neumann es nuestro modelo general para todos los juegos, y el equilibrio de Nash es nuestro concepto de solución general. Nash también observó que el supuesto de utilidad transferible puede ser eliminado sin pérdida de generalidad, debido a que las posibilidades de transferencias pueden ser puestas entre las jugadas del juego y eliminó la restricción de suma cero impuesta por von Neumann.

En su paper de 1953 sobre juegos cooperativos bipersonales (*Econometrica, 21*) ofreció una aplicación de su programa para reducir la teoría de los juegos cooperativos al análisis del equilibrio no-cooperativo. Este juego tiene un número infinito de equilibrios de Nash, pero Nash introdujo un argumento ingenioso para identificar un único equilibrio estable que coincidía con la solución de negociación que había derivado previamente en forma axiomática. Nash dejó un mensaje claro: *siempre hay que ver el proceso de toma de decisiones a nivel individual, aún si se termina en una negociación con colusión*. En realidad, si los jugadores comienzan eligiendo a sus aliados antes de obtener información, y a partir de entonces sólo actúan como parte de una unión perfectamente coordinada con sus amigos, nos desentendemos de los problemas de información. Por ejemplo, cuando en una subasta uno de los compradores está dispuesto a pagar por el objeto subastado mucho más que los demás, si los compradores hacen un acuerdo colusivo el enfoque de Nash (llamado por la literatura económica el Programa de Nash) dirige nuestra atención a la colusión como resultado de un proceso de comunicación en el que cada jugador tiene algo que decir. En este proceso, el comprador más informado puede tratar de engañar a los menos informados sobre el valor del objeto, y estos últimos racionalmente deberían tomar en cuenta esta posibilidad. Como dice Myerson, "el programa de Nash abrió las puertas a las cuestiones de información, mientras que el de von Neumann nos alejaba de ellas".

10. Equilibrio y dilemas sociales

El equilibrio de Nash es útil no sólo como predictor preciso de cómo se comportará la gente en un juego, sino también cuando no lo es, porque identifica situaciones en las cuales hay una tensión entre los incentivos individuales y otras motivaciones. Desde este punto de vista, tenemos los conocidos "dilemas sociales", donde existe una acción social deseable pero que no constituye un equilibrio de Nash. En efecto, una de las primeras respuestas a la definición del equilibrio de Nash dio lugar a uno de los ejemplos mejor conocidos en las ciencias sociales, el Dilema del Prisionero. Anticipándonos al tratamiento que haremos del mismo, consideremos el caso siguiente.

Dos hombres son arrestados por atraco. De ser condenados, recibirán una sentencia de cárcel de entre dos a cinco años; la duración dependerá de lo que recomiende el fiscal. Desgraciadamente el Fiscal del Distrito no tiene suficiente evidencia como para recomendar una condena. El FD pone a los criminales en celdas separadas. Primero habla con Joe. Le dice que si confiesa y Mike no lo hace, el FD retirará la acusación de robo dejándolo sólo con un tirón de orejas – tres meses por invadir propiedad privada. Si Mike también confiesa, el FD no puede retirar los cargos y pedirá al juez indulgencia; Mike y Joe obtendrán una sentencia de dos años cada uno.

[22] Nash, Jr., John F. (1951) *Noncooperative games, Annals of Mathematics, 54.*

Si Joe se niega a confesar, el FD no será tan amigable. Si Mike confiesa, Joe será declarado culpable y el FD pedirá la máxima sentencia posible. Si ninguno confiesa, el FD no puede declararlos culpables del robo, pero presionará para obtener una sentencia de invasión de propiedad privada, resistencia a la autoridad y vagancia.

Después de explicar todo esto a Joe, el FD va a la celda de Mike y mantiene la misma conversación con nombres invertidos. La matriz de resultados que enfrentan Joe y Mike es la siguiente, y Joe razona de la siguiente manera:

		Mike	
Joe		Confesar	No Confesar
	Confesar	*2 años,2años*	*3meses,5 años*
	No Confesar	*5 años,3 meses*	*6 meses,6 meses*

"Si Mike confiesa y yo no, me darán cinco años; si yo también confieso, me aplicarán dos años. Si Mike va a confesar, lo mejor que puedo hacer es también confesar. Si ninguno de los dos confiesa, me aplican una pena de 6 meses. Es una mejora considerable con respecto a la situación en que Mike se delata, pero puedo conseguir algo mejor: si Mike no habla y yo confieso, a mí me aplican solamente tres meses. Luego, si Mike se queda callado, voy a estar mejor confesando. En realidad, a mí me conviene confesar independientemente de lo que haga Mike."

Ambos piden a la guardia que busquen al FD para dictar sus confesiones.

El juego tiene dos propiedades interesantes. 1) Introduce un nuevo concepto de solución. Cada uno de los criminales confiesa porque calcula, correctamente, que la confesión es mejor que el silencio sea lo que haga el otro criminal. Si una estrategia conduce a un mejor resultado sea lo que haga el otro jugador, decimos que es una estrategia dominante. Si los dos jugadores tienen estrategias dominantes, tenemos una solución del juego.

2) Ambos jugadores actuaron en forma racional y ambos terminan, como resultado, peor. Parece extraño que la racionalidad, definida como tomar la decisión que maximiza los objetivos individuales, resulte en que ambos terminen peor. Para muchos, el resultado del Dilema de los Prisioneros parecerá contra-intuitivo. Pero la racionalidad es un supuesto sobre los individuos y no sobre grupos.

Este ejemplo nació como un simple experimento realizado en 1950 en la Corporación RAND por los matemáticos Melvin Dresher y Merrill Flood, para demostrar que el equilibrio de Nash no era necesariamente un buen predictor del comportamiento. El asesor de tesis de Nash, Albert Tucker, estaba preparando una exposición sobre desarrollos recientes en teoría de los juegos para el *Stanford Psychology Department* cuando vio los números en un pizarrón de la RAND. A Tucker se debe la famosa historia del dilema de los dos prisioneros perseguidos por el Fiscal de Distrito para que confiesen, aunque ambos estarían mejor si ninguno lo hiciera. En el experimento inicial y en incontables experimentos que siguieron, a menudo los jugadores logran hasta cierto grado cooperar entre sí y evitar la jugada de equilibrio (confesando ambos).[23]

Los científicos sociales en diversas disciplinas han hallado que el dilema del prisionero es útil para analizar fenómenos como la degradación ecológica y la carrera armamentista. Lo que resulta claro de un equilibrio de Nash, aún en un juego como el dilema del prisionero en el que puede resultar un mal predictor, es que el resultado cooperativo, a causa de que no constituye un equilibrio,

[23] Raiffa, H. (1992), *Toward a History of Game Theory, ed. Weintraub, E.R. (Duke Univ. Press, Durham, NC.*

resultará inestable de un modo que hará que la cooperación no pueda ser mantenida. Esta observación ha sido confirmada en varios experimentos subsiguientes sobre éste y otros “dilemas sociales”[24] . Ustedes pueden probarse entrando en la página de la universidad de Virginia y jugar el “Dilema del Viajante”, algo más complejo que el dilema del prisionero, porque sus mejores decisiones no son independientes de sus creencias sobre la estrategia que será seleccionada por los otros jugadores, partipantes en el Seminar in Behavioral Game Theory at the University of Virginia Law School de 2002.

11. Diseño de Mercados e Instituciones sociales

Una de las formas en las que avanzó la investigación sobre dilemas y otros problemas de la acción colectiva es la búsqueda de instituciones sociales surgidas para transformar los juegos de dilemas del prisionero a juegos donde la cooperación es sustentable como un equilibrio. Por ejemplo, así como firmas que venden productos similares pueden recortar sus precios hasta que el precio cubra apenas el costo de producción, es posible que una serie de acciones y reacciones conduzca a los jugadores de un juego a una situación relativamente mala para todos, con fuertes incentivos para restringir las acciones unilaterales. Ello sucede en algunos mercados laborales donde los empleadores tratan de obtener ventajas haciendo propuestas prematuras. Una solución al problema temporal del dilema del prisionero es poner en funcionamiento un centro de intercambio de informaciones en el que participarán tanto los empleadores como los candidatos. Estos centros surgieron en USA como producto de situaciones donde los estudiantes de medicina eran contratados antes del último año de graduarse (1940s) y en el Reino Unido en los 1960s. Hoy en día, los graduados de las facultades de medicina americanas y otros que buscan empleo en hospitales de USA proveen listas ordenadas de sus posiciones preferidas a un centro de intercambio de informaciones llamado el National Resident Matching Program. Resulta que un factor importante para el éxito o fracaso de estos centros de intercambio de información es si el centro está diseñado de modo que sea un equilibrio de Nash que los postulantes y empleadores participen de modo de alinear empleados y tareas de una forma estable, de manera que ningún empleador y postulante alineados preferirían no estarlo.

Las subastas son otro mercado que ha resultado de interés creciente para los economistas, ya que han sido llamados a dar su opinión sobre las mismas[25]. La teoría económica de las subastas es un buen ejemplo de cómo la teoría de los juegos y el equilibrio de Nash transformaron a la teoría económica. Antes de la teoría de los juegos, los economistas analizaban a los mercados simplemente en términos de oferta y demanda de los bienes en venta, sin discutir las reglas del juego que hacen que una subasta sea distinta a las demás o a las subastas distintas de otros tipos de mercado (como los mercados de acciones o los supermercados). Hoy en día, la discusión es practicada a menudo analizando los equilibrios de Nash de las reglas seguidas en una subasta.

12. Economía experimental

Nash también participó en tempranos experimentos en economía[26]. El paso de modelos matemáticos del comportamiento estratégico a la observación de las decisiones tomadas por la gente que juega a cambio de pagos monetarios reales bajo condiciones controladas en el laboratorio constituyó un progreso natural. A medida que la teoría de los juegos comenzó a desempeñar un rol central en teoría económica, empezó a generar decenas de predicciones

[24] Ver por ejemplo Axelrod, R. (1984), *The Evolution of Cooperation (Basic Books, New York).*
[25] Ver Milgrom, P. (2004), *Putting Auction Theory to Work, Cambridge Univ. Press, Cambridge, U.K.*
[26] Kalisch, G.K., Millnor, J.W., Nash, J.F. & Nering, E.D. (1954), *Decision Processes, eds. Thrall, Coombs & Davis (Wiley, New York).*

contrastables y sirvió para poner los fundamentos del método experimental en economía[27]. El uso creciente de métodos experimentales en economía y la interacción entre la economía y la psicología fueron reconocidos en 2002 mediante el premio Nobel otorgado a un psicólogo, Daniel Kahneman, y a un economista, Vernon Smith. Previamente a los experimentos de Smith se creía que las predicciones competitivas de la intersección oferta/demanda requerían un amplio número de comerciantes bien informados. Smith mostró que los resultados competitivos podrían ser observados con un número sorprendentemente reducido de comerciantes sin información directa sobre los valores o costos de los demás. Un área importante de la teoría de los juegos consiste en explicar éstos y otros resultados experimentales dentro del contexto de modelos dinámicos con interacción entre comerciantes estratégicos.

La enseñanza es otra aplicación emergente de la conexión entre teoría de los juegos y métodos experimentales. Un experimento realizado en clase puede mostrar a los estudiantes cómo modelos que parecen muy abstractos tienen un sorprendente poder de predicción. La red de internet hace esta práctica más fácil si se trata de un gran número de grupos de estudiantes. Por ejemplo, más de 30 diferentes tipos de juegos, subastas y mercados pueden ser analizados y jugados en el Vecon Lab de la University of Virginia donde también hay datos muestrales para experimentos en clase. Este sitio contiene entradas sobre los siguientes temas:

Vecon Lab Experiment Selection Menu

Get Started: Register, Intructions, On-line Demo, Hints, Data Displays, etc.
Auctions: Takeover Game, Common Value, Private Value, Reserve Price
Bargaining: Ultimatum/Dictator, Principal/Agent, Reciprocity, and Trust Games
Decisions: Bayes' Rule, Lottery Choice, Probability Matching, Search
Macro/Finance: Investment Game, Asset Market, Macro Markets, Gains from Trade
Games: Centipede, Coordination, Guessing Game, Matrix Games, Traveler's Dilemma
Information: Cascades, Lemons Market, Signaling/Poker, Statistical Discrimination
Markets: Bertrand, Call Market, Cournot, Double Auction, Posted Offer, Supply Chain, Vertical Monopoly
Public: Common Pool Resource, Congestion/Entry, Public Goods, Rent Seeking, Volunteer's Dilemma
Surveys: Questionnaire (for on-line surveys), Quiz Program

13. Modelos de aprendizaje y de equilibrio estocástico

La experimentación ha servido para empujar a los teóricos de los juegos a concentrarse en predecir cómo se comporta la gente cuando los supuestos de racionalidad y de previsión perfecta no son satisfechos. La literatura experimental está llena de ejemplos tanto de juegos donde el comportamiento observado converge rápidamente al equilibrio y otros donde el equilibrio constituye, en forma persistente, un pobre predictor. Esto ha reforzado la tendencia de la literatura teórica a extender la formulación estática y determinística y a considerar modelos dinámicos y estocásticos. Los experimentos dejan en claro que los jugadores a menudo no conforman una conducta de equilibrio cuando experimentan un juego por primera vez, aunque a medida que ganan en experiencia la conducta converja rápidamente al equilibrio. Por este motivo se han desarrollado modelos de aprendizaje que convergen al equilibrio en el límite, a partir de una conducta que no es de equilibrio[28]. También se han elaborado modelos de aprendizaje que

[27] Kagel, J.H. & Roth, A.E. (eds.) (1995), Handbook of Experimental Economics, *Princeton Univ. Press, Princeton.*
[28] Fudenberg, D. & Levine, M. (1998) Learning in Games, *MIT Press, Boston*.

pueden predecir el comportamiento observado en algunos juegos simples. Los modelos de aprendizaje son útiles en particular para explicar los patrones de ajuste, por ejemplo si los precios convergen desde arriba o desde abajo, así como las distribuciones de equilibrio finales.

Algunos juegos son jugados sólo una vez – por ejemplo los entornos estratégicos en muchos conflictos militares, legales y políticos son únicos en una fecha y un lugar determinados. En tal caso, no hay historia que pueda ser utilizada para formarse una predicción precisa sobre las decisiones de los demás. Luego, el aprendizaje debe producirse por introspección, pensando en lo que la otra persona haría, lo que esa persona piensa que ustedes harían, etc. Esta introspección es probable que resulte imprecisa, en particular cuando hay que pensar sobre las creencias de los demás o sobre las creencias de los demás sobre sus propias creencias, etc. Algún progreso reciente se ha producido en esta área, formulando modelos de introspección ruidosa, utilizados luego para predecir y explicar la conducta no-Nash en experimentos que usan juegos jugados una sola vez (Goeree, J.K. Holt, C.A. & Palfrey, T.R., 2002). Si un juego es repetido, por ejemplo con el alineamiento aleatorio de una población de jugadores, puede persistir cierto nivel de ruido aunque las tendencias promedio se hayan estabilizado. El “equilibrio de respuestas cuántico” se basa en la idea de que las respuestas de los jugadores a diferencias en los pagos esperados son más acentuadas cuando esas diferencias son amplias y más aleatorias cuando las diferencias son pequeñas[29] . Este concepto generaliza el concepto de equilibrio de Nash, en el sentido de que las predicciones de respuestas cuánticas convergen hacia un equilibrio de Nash a medida que disminuye el ruido. Pero el efecto de un ruido discernible no es sólo el de distribuir las decisiones alrededor de las predicciones de Nash; las interacciones estratégicas causan feedbacks en algunos juegos que magnifican y distorsionan los efectos del ruido. Esta aproximación ha sido utilizada para explicar datos de algunos experimentos de laboratorio donde la conducta observada se desvía del único equilibrio de Nash y termina en el lado opuesto del conjunto de decisiones factibles. Otro enfoque trata de reconciliar la evidencia experimental y las predicciones de equilibrio considerando cómo diferirían estas predicciones si se introdujeran regularidades sistemáticas en las preferencias de los participantes. Emerge una lección de los experimentos de negociación de pequeños grupos de gente: la gente a veces está preocupada con cuestiones de equidad así como con sus propios beneficios. La incorporación de la equidad y otras nociones de preferencias no egoistas en los modelos estándar pone a la teoría de los juegos en contacto con explicaciones evolutivas del comportamiento humano[30] .

14. <u>Perspectiva histórica de la contribución de Nash</u>

En los últimos 25 años, la noción de equilibrio de Nash se ha transformado en uno de los instrumentos requeridos por los economistas y otros científicos sociales. Es tan conocido que no necesita presentación, como tampoco la noción de Adam Smith de equilibrio competitivo. El análisis de equilibrio básico de Nash ha permitido el análisis estratégico de las interacciones económicas, políticas, legales, etc. Es utilizado tan a menudo para el análisis de grupos pequeños y medianos de agentes como el análisis competitivo es usado en los mercados amplios. Desde la publicación del paper de Nash, la teoría de los juegos ha ocupado el centro del escenario. Se ha transformado en parte de una conversación vital científica entre investigadores experimentales y otros científicos empíricos, y en una fuente de asesoramiento práctico sobre el diseño de mercados y otros entornos económicos. Mirando hacia delante, si los próximos 50 años de teoría de los juegos son tan productivos, los científicos de la disciplina incorporarán modelos más variados y realistas de la conducta individual en el estudio de la conducta estratégica, y

[29] Goeree, Holt and Palfrey han explorado esta idea en el contexto de las ofertas en las subastas (*Journal of Economic Theory, 104, 2002*).
[30] Fehr, E. & Gächter, S. (2002), *Nature,* 415.

aprenderán a usar mejores herramientas analíticas, experimentales y de computación para tratar las situaciones derivadas de entornos estratégicos complejos.

Entre 1960 y 1990 una enfermedad prolongada aisló a John Nash de la comunidad académica donde había desarrollado sus ideas. Su recuperación y regreso a la comunidad académica fueron saludados como un evento casi milagroso después de años de lucha contra la esquizofrenia. La noticia del retorno de Nash fue anunciada por Sylvia Nasar en un artículo del *New York Times*, apenas un mes después de que Nash recibiera el premio Nobel en forma conjunta con Harsanyi y Selten. En *A Beautiful Mind* Nasar incluyó viñetas fascinantes sobre las comunidades matemáticas en Princeton de los 1940s y de la RAND Corporation de los 1950s. Es dable destacar que Nash decidió no cooperar con Nasar en la preparación de su biografía. En un capítulo final, "La Más Importante Subasta que Hubo Jamás", Nasar ilustra la importancia contemporánea de la teoría de los juegos describiendo el rol crucial que desempeñaron los teóricos en juegos en el diseño de subastas de la FCC que recaudaron miles de millones de dólares para el Gobierno de los EE.UU. La teoría de las subastas es una de las aplicaciones más importantes de la teoría.

Antes de Nash, la teoría de los precios era la metodología general disponible de la economía. El poder de esta teoría había servido a los economistas como guía en la toma práctica de decisiones hasta un punto no alcanzado por los estudiosos de ninguna otra rama de las ciencias sociales. Pero la teoría de los precios tiene sus propios límites aún dentro del alcance tradicional de la economía: situaciones de negociación con individuos que tienen información simétrica, la organización interna de las empresas, etc. La teoría de los precios ofrece puntos de vista profundos sobre el funcionamiento y eficiencia de un sistema de mercados con derechos de propiedad claramente establecidos para todos los bienes, pero no puede ser aplicada fácilmente en una economía de comando. En la economía del desarrollo, hacer un uso exclusivo de la teoría de los precios puede llevar a concentrarse en los aspectos que se pueden formular dentro de sus cánones, descuidando relativamente otros aspectos como el crimen y la corrupción que pueden socavar al sistema de derechos de propiedad que es un supuesto de la teoría de los precios. La perspectiva analítica más amplia de la teoría de los juegos no cooperativos liberó al análisis económico aplicado de estas restricciones metodológicas. Ya no hay excusas como para considerar a los sistemas de mercado y de comando con las mismas técnicas, y de reconocer las interconexiones esenciales entre las instituciones económicas, sociales y políticas del desarrollo económico.

A partir de Adam Smith, la teoría económica alcanzó un alto nivel de rigurosidad utilizando álgebra lineal de precios y cantidades en el espacio vectorial de las asignaciones de bienes, y esta metodología matemática alentó a los economistas a definir su campo en términos de concentrarse en bienes materiales. Léon Walras, como apreciaremos más adelante, dio lugar a una revolución importante del campo de la economía al introducir el elemento subjetivo y un método matemático riguroso. Pero fue con la aceptación de la teoría fundamental de Nash y los consiguientes refinamientos de la teoría de los equilibrios no cooperativos en 1951, que se amplió considerablemente el alcance del análisis económico aplicado, hasta el punto que se podría redefinir a la economía como el estudio de la conducta competitiva racional en cualquier sociedad. Al aceptar a la teoría de los juegos no cooperativos como la metodología analítica nuclear con la teoría de los precios, el análisis económico retornó a la visión amplia que caracterizó a los antiguos filósofos sociales griegos que le dieron a la economía su nombre.