El modelo de Walras

Interdependencia de las variables en el modelo de Walras-Cassel. La ley de Walras. Condiciones de producción lineales: teoremas de Rybcynski y de Stolper-Samuelson. El concepto de imputación. Factores libres y bienes no producidos. Teorema de dualidad de la programación lineal. Ilustración gráfica de un problema lineal. Existencia y unicidad del equilibrio general.

Interdependencia de las variables en el modelo de Walras-Cassel

En 1874 apareció la obra capital del economista León Walras [1], *Elements d'Economie Politique Pure*. Esta obra introdujo muchos de los conceptos hoy utilizados en la teoría del equilibrio económico. Posteriormente, Gustav Cassel (1918) y Abraham Wald (1936) ampliaron y corrigieron su tratamiento. Hacia 1950 hubo un resurgir de interés en su teoría, cuando se desarrollaron los primeros esquemas con tecnologías lineales y problemas de existencia. Con Arrow, Debreu y Koopmans el modelo (denominado desde ahora de Walras-Cassel) fue integrado con la tradición paretiana y se transformó en el modelo *neo-walrasiano*.

Los aspectos centrales del modelo de Walras son los siguientes: los individuos poseen factores y demandan bienes producidos; las firmas demandan factores y producen bienes con tecnologías de coeficientes fijos. Un equilibrio general es definido como un conjunto de precios de factores y de los productos tales que las cantidades relevantes demandadas y ofrecidas en cada mercado son iguales entre sí. Es decir, se equilibran los mercados de bienes y de factores. La competencia asegura que el precio es igual al costo de producción de cada proceso en operación [2] (¿por qué?). El modelo Walras-Cassel es una teoría del valor *subjetiva* basada en la escasez, en lugar de una teoría *objetiva* basada en el costo de producción.

Vamos a denotar como **v** a los factores, como **x** a los bienes producidos, como **w** a los precios de los factores y como **p** a los precios de los bienes. Los individuos son propietarios de los factores y desean bienes producidos. Deciden cuánto ofrecer de los factores y su demanda de los bienes. La oferta de los factores va a depender de todos los precios: **F(p,w)** mientras que la demanda también va a depender de los mismos precios: **D(p,w)** [3]. Aquí hay una simplificación interesante: la demanda de los bienes se obtiene (como fue explicado en clase) mediante la maximización de la utilidad de

[1] Marie-Esprit Léon Walras (1834-1910) considerado por Joseph Schumpeter como "el economista más importante de todos los tiempos" descubrió, conjuntamente con Carl Menger y W. Stanley Jevons la teoría de la utilidad marginal, siendo el primer economista que desarrolló un sistema multi-ecuacional del equilibrio económico general. Al asumir la cátedra de Lausanne, se concentró en temas de "economía pura" y dictó cursos de matemáticas. Los resultados fueron incorporados a los *Eléments* que, a través del tiempo, se transformaron en una versión crecientemente sofisticada de su modelo de equilibrio general. También hizo aportes a cuestiones de reforma monetaria, bimetalismo y temas bancarios. En 1893 fue sucedido en la cátedra por Vilfredo Pareto. Ambos constituyeron a partir de entonces el núcleo de la llamada "escuela de Lausanne". Sus *Eléments* fueron escritos como formando parte de una obra más importante, a la que no pudo poner término. En 1874, el subtítulo de la obra fue *teoría de la riqueza social*, en 1896 el subtítulo de la obra *Estudios sobre la Economía Social* fue *teoría de la división de la riqueza social* y en 1898 publicó *Estudios de Economía Aplicada* con el subtítulo *teoría de la producción de la riqueza social*.

[2] A lo largo de este documento solamente se trabajará con costos medios constantes.

[3] **F(...)** y **D(...)** deben entenderse como *vectores.*

los individuos. Pero el modelo no introduce explícitamente los beneficios, es decir, las empresas no tienen una función objetivo independiente. Simplemente, toman los factores ofrecidos a ellas por los consumidores y los convierten en bienes deseados por los consumidores por medio de "coeficientes fijos" de producción, que denotamos como **B**. Esta matriz tiene n*m coeficientes, de acuerdo con la siguiente disposición:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} \; b_{12} \; \ldots \; b_{1m} \\ b_{n1} \; b_{n2} \; \ldots \; b_{nm} \end{bmatrix}$$

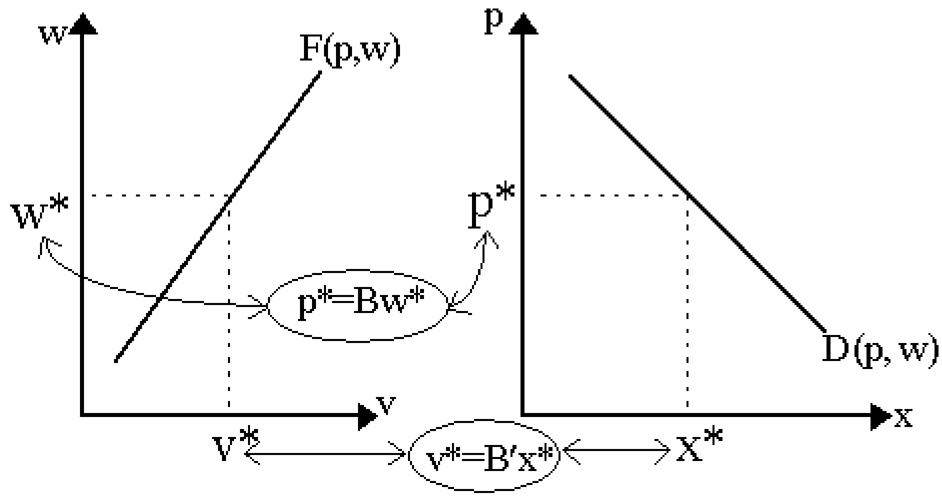
Existen F firmas, pero todas las firmas tienen la misma tecnología. De hecho, las firmas no persiguen, a diferencia de los consumidores, una función objetivo. Esto podría ser interpretado como una economía dominada por los consumidores, sin un rol explícito de las firmas.

Hay ciertas condiciones que deben ser cumplidas. Una, que en cada mercado de cada factor haya equilibrio, es decir, que la oferta sea igual a la demanda de las empresas. Esto lo escribiremos como **v=B'x**. El signo (') refleja que las columnas de **B** son los coeficientes de producción de las firmas en cada "proceso", en tanto que las filas contemplan la visión traspuesta [4]: es decir, el segundo miembro es, factor por factor, la suma de la demanda de todas las empresas. Segunda condición impuesta es la que surge de la hipótesis de competencia perfecta, a saber que el precio de cada producto resulta igual al costo de producción en cada proceso. Estas condiciones son escritas como **p=Bw**.

Ambas condiciones son denominadas las *condiciones de producción lineales* del modelo de Walras-Cassel. Notar que estas dos son *condiciones de equilibrio* que deben ser satisfechas. ¿Cuáles son los datos? Son las preferencias de los consumidores (funciones de utilidad), las cantidades existentes de los factores y la tecnología de producción. A partir de estos componentes se pueden derivar en equilibrio: (1) los precios de los factortes **w***; (2) los precios de los productos **p***; (3) las cantidades de los factores **v***; (4) las cantidades de los productos **x***. El equilibrio está definido cuando los consumidores maximizan su utilidad, las empresas no violan la libre competencia y los mercados de bienes y factores se igualan.

Estos cuatro sistemas de ecuaciones conectan entre sí a todo el sistema. **D(p,w)** conecta a los precios con las cantidades de los productos; **F(p,w)** conecta a los precios con las cantidades ofrecidas de los factores; **v=B'x** conecta a las cantidades de producto con las cantidades de factores; y **p=Bw** conecta a los precios de los productos con los precios de los factores. Una representación gráfica se incluye a continuación:

[4] Como se insistirá más adelante, la demanda de cada factor de las empresas obedece al principio que iguala el precio del factor al "valor de la productividad marginal de ese factor en la empresa".



Fíjense que dado cualquiera de los cuatro elementos (**w, p, x** ó **v**) a su valor de equilibrio se pueden obtener los tres restantes. Por ejemplo, si los precios del producto están dados en **p*** obtenemos **x*** de la función de demanda y **w*** a partir de la condición de competencia. A su vez, **x*** nos proporciona **v*** a partir de la igualdad oferta factorial= demanda factorial **v=B'x** en tanto que **w*** nos da **v*** a través de la función de oferta factorial **F(p,w)**.

Podríamos haber partido desde el equilibrio en el mercado de productos **x***. Luego, obtendríamos **p*** vía la función de demanda y **v*** por medio del equilibrio del mercado factorial **v=B'x**. Luego el precio **p*** nos proporciona **w*** por medio de la condición competitiva **p=Bw** y **v*** nos da **w*** por medio de la función de oferta factorial **F(p,w)**. En equilibrio necesitamos que ambos cálculos de **w** sean similares.

Por lo tanto: <u>no existe una dirección necesaria de causalidad en un sentido o el otro</u>. El sistema de Walras-Cassel es un sistema completamente *simultáneo*. Los únicos datos exógenos son las preferencias de los consumidores, las dotaciones factoriales y la tecnología.

Walras trató de mostrar que en el sistema había tantas ecuaciones como incógnitas. Cuando verificó esto, *supuso* que era suficiente para demostrar la existencia de una solución económicamente significativa. Repasemos el sistema de ecuaciones:

[1] Tenemos n ecuaciones de igualdades entre precios y costos marginales;

[2] Tenemos n ecuaciones de condiciones de equilibrio en los mercados de los productos;

[3] Hay m ecuaciones que surgen de las condiciones de equilibrio en los mercados de factores;

[4] Hay m ecuaciones que surgen de la oferta en el mercado de los factores.

En total tenemos (2n+2m) ecuaciones. Las incógnitas son las n cantidades de bienes producidos; las m incógnitas de factores utilizados; los n precios de los productos y los m precios de los factores. En total, pues, hay (2n+2m) incógnitas.

La ley de Walras

Pero una ecuación puede ser eliminada, ya que cada individuo resuelve un problema del tipo:

max $U^h=U^h(x^h,v^h)$ sujeto a $p'x^h=w'v^h$. Los ingresos de las familias provienen de la venta de los factores $w'v^h$. El resultado es obtenido como funciones de demanda y funciones de oferta factoriales del siguiente tipo:

$x_i^h= D_i^h(p,w)$ para cada bien i y para cada familia h.

$v_j^h= F_j^h(p,w)$ para cada factor j y para cada familia h.

Obsérvese que se verifica la restricción presupuestaria: $p'x^h= w'v^h$ para cada familia h. Sumando las ecuaciones para todas las familias obtenemos:

$x_i=D_i(p,w)$

$v_j=F_j(p,w)$

Si cada consumidor está cumpliendo con su restricción presupuestaria, que requiere que el valor de la demanda sea igual al ingreso total (compuesto por el valor de la oferta de factores del consumidor y su participación en los beneficios, si los hay, de las empresas productivas, pero dada la hipótesis competitiva éstos son siempre cero) se tiene para cada consumidor $p'x^h=w'v^h$**.** Sumando para todos los consumidores, obtenemos que para el mercado en su conjunto $\sum_i p_i(\sum_h x_i^h - \sum_f x_i^f) + \sum_j w_j(\sum_f v_j^f - \sum_h v_j^h) = 0$ donde la notación x_i^f y v_j^f indica las cantidades ofrecidas de los bienes y factores por el hogar h.

Por consiguiente, podemos excluir una cualquiera de las condiciones de equilibrio de nuestra lista y el número total de ecuaciones se transformará en (2n+2m-1). Esto puede hacernos creer que las incógnitas exceden así al número de ecuaciones. Pero no es así, puesto que nos hemos olvidado del bien **numerario**. Si por ejemplo se fija el precio de la primera mercancía como igual a 1 eliminamos a una de las incógnitas, y restablecemos la igualdad entre incógnitas y ecuaciones. Walras pensó en 1874 que así había demostrado la existencia de un equilibrio.

Condiciones de producción lineales

Examinemos un poco más de cerca la esfera de la producción. Vamos a suponer que en la economía hay solamente dos empresas, que emplean dos factores para producir dos productos. Las ecuaciones del mercado de factores $v=B'x$ se transforman entonces en:

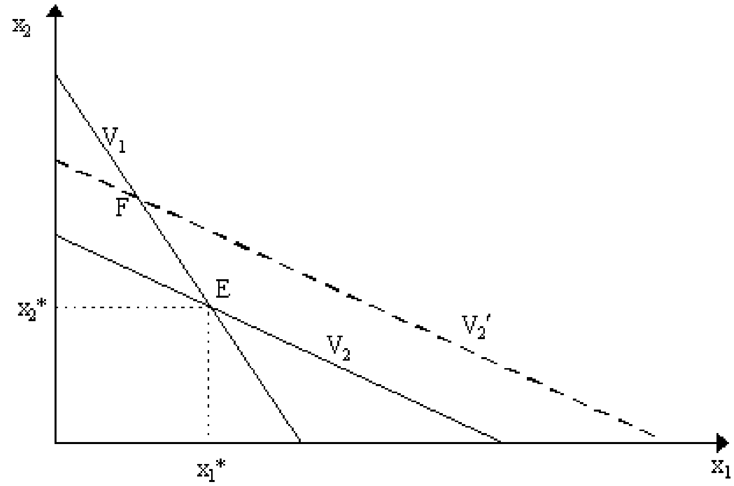
$v_1=b_{11}x_1+b_{12}x_2$

$v_2=b_{21}x_1+b_{22}x_2$

Notando que la primera ecuación puede ser escrita también como

$x_2=(v_1/b_{12})-(b_{11}/b_{12})x_2$

esta ecuación proporciona una primera línea V_1 en la figura siguiente:



Esta línea representa todas las combinaciones de bienes que dan lugar a equilibrio en el mercado del factor 1, *dado* v_1 (la oferta total del factor). Nótese que si se incrementa la oferta factorial, esta línea se desplaza hacia arriba y a la derecha.

Otro tanto podemos hacer con la segunda ecuación, lo que proporciona una segunda línea V_2. Esta línea representa todas las combinaciones de bienes que dan lugar a equilibrio en el mercado del factor 2. También, si se incrementa v_2 esta línea se desplazará hacia arriba y a la derecha.

Obviamente el equilibrio se obtiene cuando ambas igualdades se verifican, en la intersección en el punto E. Este punto representa, por consiguiente, un equilibrio en el mercado de factores.

Teorema de Rybczynski. En un modelo simple de dos sectores, si los precios se mantienen constantes, un aumento de la oferta de un factor incrementará la producción de aquel bien que es intensivo en ese factor y disminuirá la producción del bien restante. Basta notar para ello que, en la figura, la línea V_1 es más empinada que la línea V_2. Podemos imaginar que el factor v_1 es "capital" y el factor v_2 es "trabajo". Por lo tanto, la nueva intersección pasa a estar ubicada en el punto F. ¿Cuál es el significado de la inclinación diferente de las rectas dibujadas? Para simplificar, llamemos "calzado" al bien 2 y "trabajo" al factor 2. Suponer que el calzado es "relativamente intensivo" en trabajo es afirmar que $b_{22}/b_{12}>b_{21}/b_{11}$ lo que es equivalente a $b_{11}/b_{12}>b_{21}/b_{22}$.

Pasemos ahora a la esfera de los precios. Las condiciones de competencia llevarán a **p=Bw** lo que, con dos bienes y dos factores, significa que [5]:

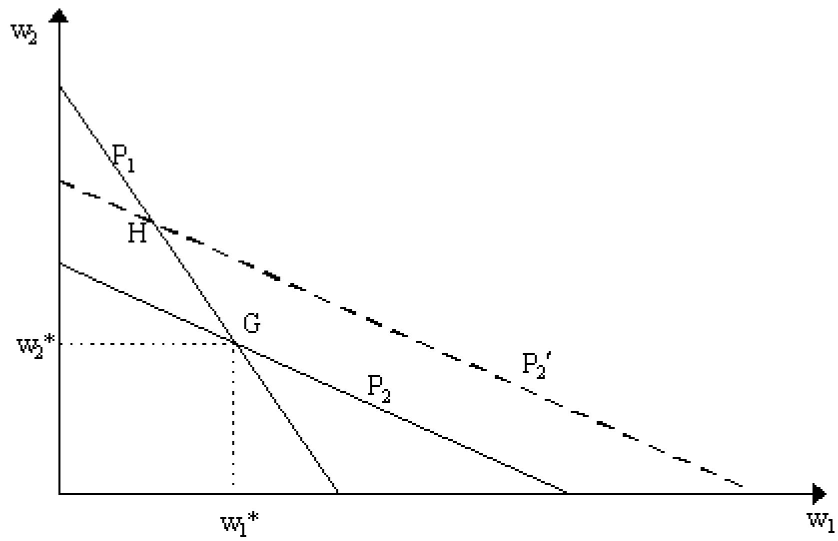
$p_1=b_{11}w_1+b_{21}w_2$

---

[5] Nótese que ahora los coeficientes de producción han sido reordenados. La matriz utilizada no es igual ahora a la matriz original $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ sino $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{bmatrix}$.

$p_2=b_{12}w_1+b_{22}w_2$

Las líneas de igualdad precio-costo son las que se incluyen en el gráfico siguiente:



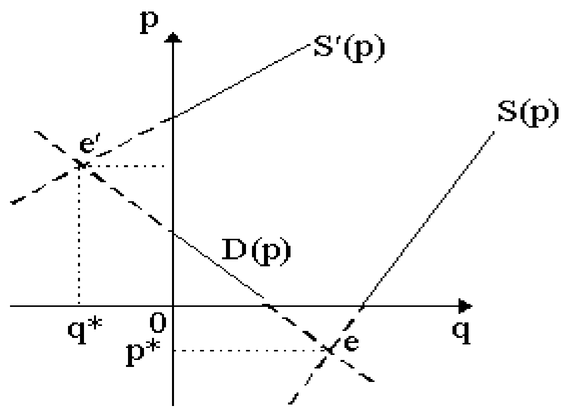
La primera de las ecuaciones puede ser re-escrita como $w_2=(p_1/b_{21})-(b_{11}/b_{21})w_1$ y ha sido graficada en la figura como P_1. Corresponde al lugar geométrico de las combinaciones de precio que cumplen con la igualdad precio=costo marginal para la industria 1, *dado* un precio de su producto p_1. Aumentos del precio trasladan la línea en dirección noreste. En forma similar, podemos trazar la línea que representa a la segunda ecuación, que da lugar a la recta P_2. La intersección de ambas líneas en G conducen a una combinación de precios de ambos factores, w_1^*, w_2^* que es la *única* combinación que cumple con ambas igualdades de precio a costo marginal. La frontera P_1GP_2 se denomina **frontera del precio de los factores**.

Este procedimiento refleja el concepto de **imputación** típico de la escuela austríaca. En resumen, *dados* los precios de los productos p_1, p_2 y la tecnología podemos en forma inmediata determinar los precios factoriales necesarios w_1, w_2. Luego, los precios de los factores pueden ser imputados a partir de los precios de los productos. ¿Pero, de dónde surgen los precios de los productos? En forma presumible, surgen del problema de maximización de utilidad: un precio de producto es elevado cuando se encuentra muy demandado por los consumidores. Luego, el principio de imputación captura la idea de que la demanda de los bienes actuando sobre una oferta fija de factores es la que da valor a estos factores. Pero esta idea debe ser calificada en un sistema de equilibrio general, pues al final de cuentas, los precios y los costos de producción están determinados ambos en forma simultánea sin ninguna dirección de causalidad.

Teorema de Stolper-Samuelson: Como se observa en la figura, la industria que produce x_1 es relativamente intensiva en el factor v_1 y la industria x_2 es relativamente intensiva en el factor v_2. Este teorema afirma que, en un modelo simple de dos sectores, si los productos son mantenidos constantes, un alza del precio relativo de un bien elevará el precio del factor que es utilizado en forma relativamente más intensiva, y bajará el precio del factor restante. Obsérvese que en la figura la posición de equilibrio pasa de G a H.

Factores libres y bienes no producidos

La solución de Walras, haciendo que el número de ecuaciones sea igual al número de incógnitas no es condición ni necesaria ni suficiente para la existencia de solución. No es suficiente, porque $xy=3$ y $x+y=1$ son dos ecuaciones con dos incógnitas que no tienen solución real. Además, no es necesaria porque, por ejemplo, $x^2+y^2=0$ tiene solución única, siendo una ecuación con dos incógnitas. Heinrich von Stackelberg fue uno de los primeros en señalar esta dificultad. Hans Neisser notó que, en particular, es perfectamente posible que la oferta factorial intersecte a la demanda a precios negativos. También, si los precios deben igualar el costo de producción, esto puede dar lugar a situaciones con niveles negativos de producto . Esto se visualiza en el gráfico:



Pero precios y cantidades negativas, aunque posibles dentro del sistema, no tienen significado económico. Fue Friederik Zeuthen quien, en 1933, sugirió que en el sistema deben ser introducidas *desigualdades* de manera de permitir la existencia de *bienes libres*. Como lo observó Zeuthen, el sistema de Walras-Cassel impone un supuesto arbitrario de que *todos* los factores son *escasos* y de que por consiguiente *todos tienen que tener precios*.

Pero un factor es escaso solamente si hay más demanda que lo disponible – de allí el precio. Zeuthen planteó que es completamente imaginable que un factor sea tan abundante o que su demanda sea tan baja como para que *no sea escaso* (como en el ejemplo de la figura), y luego tener un precio *igual a cero*. En todo caso, no es posible decidir *a priori* qué factores son libres y cuáles no. Qué bienes son "económicos" o "no-económicos" debería ser un *resultado endógeno de la teoría.*

En 1935, se realizó en Viena un coloquio histórico, en el que Karl Schlesinger y Abraham Wald apoyaron la crítica de Neisser-Stakelberg-Zeuthen al sistema de Walras-Cassel, y lo trataron de resolver introduciendo desigualdades entre las ecuaciones de demanda de factores. Por consiguiente, tenemos que en lugar de la versión anterior, se obtendría

$$\mathbf{v \geq B'x}$$

de tal manera que, en equilibrio, para un factor particular *j*, ó bien la cantidad ofrecida es igual a la cantidad demandada (es decir,$v_j=B_j\ x$) ó la cantidad ofrecida excede a la cantidad demandada (es decir, $v_j > B_j\ x$) en cuyo caso el precio del factor debe ser cero ($w_j=0$). John von Neumann, en 1937, adoptó la solución anterior pero introduciendo además otra: a saber, que las ecuaciones precio=costo marginal deberían ser transformadas en desigualdades para permitir bienes "no producidos". Es decir, en nuestro caso tendríamos

$\mathbf{p \leq Bw}$

de modo que, en equilibrio, para un bien particular o bien su precio es igual al costo de producción ($p_i=B_iw$) ó su precio es menor que el costo de producción (o sea, $p_i<B_iw$) en cuyo caso el monto producido debería ser cero ($x_i=0$).

Luego, las soluciones de desigualdad de Schlesinger-Wald-von Neumann implican que, en equilibrio, algunos factores pueden no tener valor y algunos bienes pueden no ser producidos. De este modo, garantizamos que nunca aparecerán precios o cantidades negativas en el equilibrio. En su lugar, hablaremos de "factores libres" ó de "bienes no producidos".

Teorema de dualidad de la programación lineal

Aparentemente, el mismo Walras fue consciente de este problema, pero en razón de que la matemática de su tiempo no estaba suficientemente desarrollada, Walras sintió que debía imponer igualdades al efecto de obtener una solución determinada. Fue Wald quien mostró que la existencia de un equilibrio era perfectamente posible aún cuando se impusieran desigualdades. El insight particular es el siguiente.

En un problema de programación lineal, el llamado problema *primal* consiste en:

max p'x
sujeto a v≥B'x y las condiciones de "no negatividad" **x≥0**.

Una interpretación aplicable es que estamos *maximizando el valor del producto sujeto a las restricciones de que la demanda factorial (B'x) no exceda a la oferta disponible (v) y a condiciones de obtener una solución no negativa.* Llamemos **x*** a la solución.

La teoría de la programación establece que en este caso existe otro problema que se denomina *dual* consistente en:

min w'v
sujeto a p≤Bw y las condiciones de "no negatividad" w≥0

En este problema se busca el mínimo de los gastos pagados sujeto a que el costo de producción Bw no caiga por debajo de un cierto precio del producto p. Así , en el problema dual, se obtiene una solución **w***. El *teorema de dualidad de la programación lineal* establece los siguientes resultados centrales:

(i) Existe una solución al primal **x*** si y solamente si existe una solución al dual **w***.
(ii) El valor maximizado de la función objetivo del primal es igual al valor minimizado de la función objetivo del dual. Esto implica que **p'x*=w*'v** lo que es otra manera de imponer competencia pura (es decir, beneficios cero) en equilibrio.
(iii) Se tendrá, en la solución, que se cumplen las siguientes condiciones denominadas de *holgura complementaria*:

$$\mathbf{w^*[v-B'x^*]=0}$$

$$\mathbf{x^*[Bw^*-p]=0}$$

La última condición (iii) es extraordinariamente importante, ya que la holgura complementaria reemplaza a las condiciones de equilibrio de mercado y de igualdad precio-costo marginal y permite situaciones con bienes libres y productos no producidos. La primera condición establece que para todo factor, ó bien el mercado se equilibra ($v_j=B_jx^*$) ó bien algunos factores estarán en oferta excedente ($v_j>B_jx^*$), pero, si resulta esto último, la condición requiere que $w_j=0$ (el factor en exceso de oferta será un bien libre). Así $w_j>0$ lleva a que $v_j=B_jx^*$, es decir, un factor equilibrará su mercado si gana un precio positivo. Si $v_j>B_jx^*$ luego el factor debe ser libre.

La segunda condición de holgura complementaria implica que para todo bien producido i ó bien el precio es igual al costo (marginal) de producción (de tal forma que $p_i=B_iw^*$) ó bien el precio es menor que el costo marginal ($p_i<B_iw^*$) pero, en este caso, la condición exige que $x_i=0$ (el nivel correspondiente de producción debe ser cero). Así si $x_i>0$ tendremos necesariamente que $p_i=B_iw^*$, es decir, un bien producido en monto positivo tendrá un costo marginal igual al precio. Si $p_i<B_iw^*$ luego el bien no será producido.

Las variables duales son más importantes que lo que parece. Para el problema primal, puede demostrarse que $\mathbf{w_j^*=\partial(p'x^*)/\partial v_j}$. Luego, el programa lineal óptimo tiene la propiedad de que el precio del factor óptimo $\mathbf{w_j}$ **debe ser igual al valor del producto marginal de ese factor**. Por consiguiente, estos teoremas de dualidad contienen una resurrección de la **teoría de la productividad marginal de la distribución**. Este resultado fue un poco shockeante para algunos economistas de la profesión, que suponían que los productos marginales no estaban definidos a menos que una *función de producción* diferenciable existiera, y por consiguiente que una tecnología lineal, de proporciones fijas, no daría lugar a una teoría de la productividad marginal de la distribución.

Los precios obtenidos como solución de un problema dual reciben el nombre de variables duales ó **precios sombra.** Como se verá más adelante, tienen importantes aplicaciones en la teoría del planeamiento económico.

Existe un ejercicio análogo para el problema dual. En equilibrio, $\mathbf{\partial(w'^*v)/\partial p_i=x_i^*}$ lo que puede ser interpretado como que el incremento de los costos de producción ante un aumento del precio del bien i debe ser igual al nivel óptimo producido del bien. Este es el contenido del famoso *lema de Hotelling* de la teoría de la producción.

Ilustración gráfica de un problema lineal

Usando el modelo desarrollado previamente para el enfoque de Walras-Cassel el problema primal puede ser escrito como

$$\mathbf{\max\ p_1x_1+p_2x_2}$$

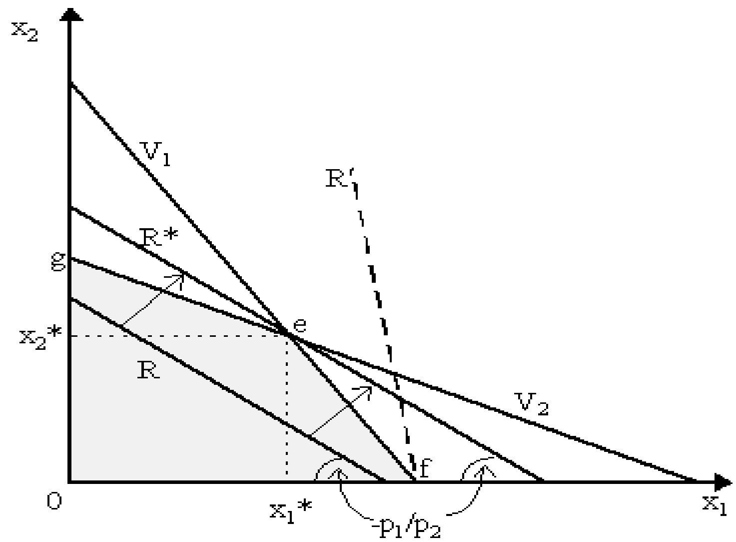
sujeto a

$$\mathbf{v_1\geq b_{11}x_1+b_{12}x_2}$$

$\mathbf{v_2 \geq b_{21}x_1+b_{22}x_2}$

$\mathbf{x_1, x_2 \geq 0.}$

La representación gráfica se incluye a continuación. Las desigualdades de los mercados factoriales nos permiten formar una región **factible** que es el área sombreada debajo de las líneas V_1 y V_2. La condición x_1, $x_2 \geq 0$ asegura simplemente que la región factible está por arriba de los ejes.



El objetivo del problema es maximizar el ingreso total **p'x** (donde **p** está dado exógenamemte). Con R representando un monto *dado* de ingreso total, se define una línea denotada en el gráfico como R. Esta línea puede ser representada como

$x_2=R/p_2-(p_1/p_2)\ x_1$

Mayores niveles de ingreso R corresponden a líneas paralelas crecientes hacia la derecha. Con los precios dados, el problema primal conducirá a la solución $\mathbf{x^*=(x_1^*, x_2^*)}$ representada en el gráfico mediante el punto **e**. Esta solución tiene lugar en un ángulo e que se encuentra en la intersección de las dos restricciones.

Sin embargo, no necesariamente la solución del problema primal conducirá a un "equilibrio de mercados". Por ejemplo, si los precios de los productos condujeran a una línea de ingresos más empinada (por ejemplo R') la solución se alcanzaría en un punto como **f**. En este punto, la línea V_1 es la limitante, no así la línea V_2. Por consiguiente, a estos nuevos precios, el nuevo problema de maximización de ingresos conduce a una solución con "equilibrio de mercado" para el factor v_1 y exceso de oferta para el factor v_2. Obsérvese que en f no producimos nada del bien x_2.

Vayamos al problema dual, que en nuestro caso es:

$\mathbf{\min\ w_1v_1+w_2v_2}$

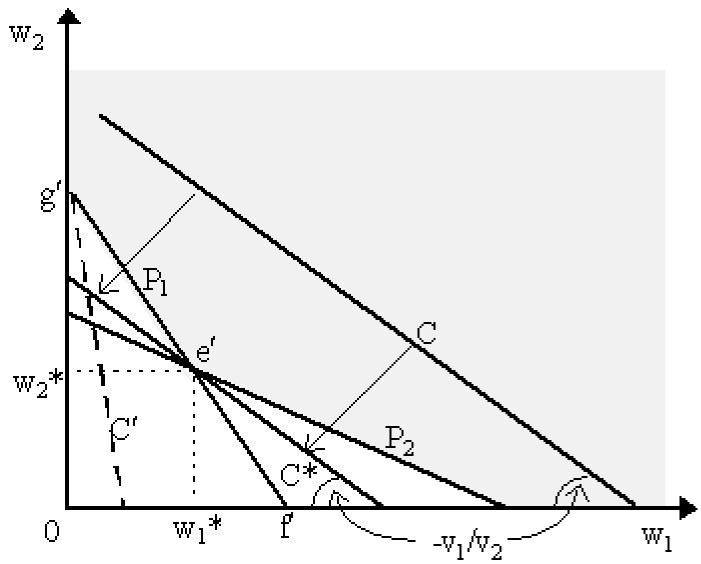
sujeto a

$\mathbf{p_1 \leq b_{11}w_1 + b_{21}w_2}$

$\mathbf{p_2 \leq b_{12}w_1 + b_{22}w_2}$

$\mathbf{w_1, w_2 \geq 0}$

Se ilustra a continuación.



Las desigualdades precio-costo de ambos procesos dan lugar a una región factible representada por el área sombreada por encima de las líneas P_1 y P_2. La línea P_1 es el lugar geométrico de los precios de los factores en que la primera restricción se verifica como igualdad, y P_2 es el lugar geométrico correspondiente a la segunda restricción. Las condiciones de no-negatividad requieren que la región factible no se extienda más allá de los ejes.

El objetivo en el dual es minimizar los pagos totales a los factores **wv** con niveles factoriales exógenamente dados. Denotando como C a un nivel dado de pago a los factores, podemos definir el lugar geométrico $\mathbf{C = w_1v_1 + w_2v_2}$ con combinaciones de precios factoriales que, dadas las ofertas factoriales v_1, v_2 producen el mismo costo C. Este lugar geométrico puede ser descripto también mediante $w_2 = (C/v_2) - (v_1/v_2)w_1$. A costos más bajos, nos desplazamos en la dirección sud-oeste en el gráfico.

La solución se obtiene mediante un procedimiento similar al usado en el primal. Con ofertas factoriales fijas v_1, v_2 el problema dual conducirá a precios factoriales solución en el punto e', el que corresponde al costo más bajo de los que cumplen con las restricciones precio-costo marginal. Como e' está en el ángulo en que se encuentran las dos restricciones, ambas restricciones se terminan cumpliendo como *igualdades*. Pero nuevamente éste puede no ser el caso. Si las ofertas factoriales condujeran a un lugar geométrico más empinado como C' la solución se obtendría en un ángulo como g'. En este rincón, la restricción P_1 es operativa pero la P_2 no, luego el proceso productivo x_2 está operando a pérdida. En este punto g', los precios factoriales son $w_1=0$ y $w_2=g'>0$.

Existencia y unicidad del equilibrio general

¿De dónde provienen los precios **p** y las ofertas factoriales **v** en el modelo lineal? Para esto, necesitamos volver a las funciones de demanda de los productos y de oferta factoriales como en el modelo de Walras-Cassel. Para simplificar el tratamiento, supondremos que las funciones de oferta conducen a factores ofrecidos en forma inelástica (es decir, **v** está fijo).

El problema de existencia que planteó Wald era como sigue. Considérese al vector de precios de equilibrio **p***. Si lo incorporamos a nuestros problemas primal y dual, obtenemos soluciones **x*** y **w***. Tomando estos precios derivados **w*** y nuestros precios originales **p***, los podemos imponer a nuestras funciones de demanda para obtener las cantidades demandadas **D(p*,w*)=x***. Si estamos en equilibrio, lo que obtendremos es que los niveles óptimos hallados en el problema primal **x*** resultarán iguales a su demanda, es decir **D(p*,w*)=x***. De no ser así, los precios **p*** no podrían ser considerados de equilibrio. La cuestión de existencia es: ¿existe en verdad un **p*** tal que los **w*** y **x*** que obtenemos como soluciones de los problemas lineales nos conducen al equilibrio?

Hay tratamientos rigurosos de este punto que muestran la consistencia de esta conjetura (por ejemplo, K. Lancaster, *Economía Matemática*, 1968, Cap. 9). También puede mostrarse que, bajo ciertas condiciones, el equilibrio resultante es *único*.

Bibliografía

Hal R. Varian, *Análisis Microeconómico*, Capítulos 17-18.

Esta exposición está basada parcialmente en los documentos de internet ubicados en http://cepa.newschool.edu /het/essays/get /walcass.htm y http://cepa.newschool.edu/het/essays/get/waldsys.htm.